MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE

Direction des personnels enseignants

CAPES EXTERNE & CAFEP-CAPES
DE MATHÉMATIQUES

Rapport de Monsieur Jean MOUSSA
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale
Président du Jury

2004
CENTRE NATIONAL DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUE

CONSEILS PRATIQUES AUX FUTURS CANDIDATS

Il est recommandé aux futurs candidats de s'informer à l'avance sur les modalités des concours de recrutement en général et sur celles particulières au CAPES externe et au CAFEP-CAPES de mathématiques.

Les renseignements généraux (les conditions d'accès ; la préparation ; le déroulement du concours ; la carrière dans l'enseignement secondaire) se trouvent réunis dans la brochure « enseigner dans les collèges et les lycées » diffusée par le ministère de l'éducation nationale. (D.P.E., 34 rue de Châteaudun, 75009 Paris). On peut se procurer cette brochure directement au ministère ou auprès des services communs universitaires d'information et d'orientation.

Les renseignements spécifiques (programmes ; nature des épreuves) sont publiés dans le bulletin officiel de l'éducation nationale, publication qui informe les enseignants : carrière, programmes, nominations, vacances de postes, concours, etc. Ces renseignements se trouvent également, pour l'essentiel, dans le rapport du concours.

Le jury, pour faciliter la recherche d'information émanant des candidats et des formateurs, a en outre créé un site à l'adresse

www.capes.math.jussieu.fr

sur lequel il a réuni l'ensemble des informations utiles à la préparation au concours. Les informations figurant sur ce site n'ont pas valeur légale ; seules les informations délivrées directement par la DPE et par le Ministère ont valeur officielle.

« LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ETABLIS SOUS LA RESPONSABILITE DES PRESIDENTS DE JURY »

SOMMAIRE

I. PRESENTATION DU CONCOURS 2004

1. Composition du jury.

Par arrêté en date du 18 février 2004, la composition du jury est la suivante:

	NOM	PRENOM	FONCTION	ACAD
M.	ACX	Olivier	Professeur de Chaire Supérieure	PARIS
M.	AEBISCHER	Bruno	Professeur Agrégé	BESANCON
Mme	AEBISCHER	Anne-Marie	Professeur Agrégé	BESANCON
M.	ALESSANDRONI	Philippe	IA-IPR	NANCY METZ
Mme	AMIOT	Martine	IA-IPR	CRETEIL
M.	ANDRIEUX	Jean-Claude	Professeur Agrégé	DIJON
M.	AUBRY	Pierre-Jean	Professeur Agrégé	CRETEIL
Mme	AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	VERSAILLES
Mme	AYAX	Sylvie	Professeur Agrégé	VERSAILLES
M.	AYMES	Jean	IA-IPR	TOULOUSE
M.	BADRA	Abdallah	Maître de conférences	CLERMONT FERRAND
M.	BALZER	Paul	Professeur Agrégé	STRASBOURG
M.	BARBOLOSI	Dominique	Maître de Conférences	AIX MARSEILLE
M.	BELLEBOUCHE	Daniel	Professeur Agrégé	AMIENS
M.	BELLY	Daniel	Professeur Agrégé	AIX MARSEILLE
M.	BELTRAMONE	Jean Paul	IA-IPR	CRETEIL
M.	BERGERON	Axel	Professeur Agrégé	NANTES
Mme	BERTRAND-MATHIS	Anne	Professeur des Universités	POITIERS
Mme	BLAU	Danielle	IA-IPR	TOULOUSE
M.	BLOUZA	Adel	Maître de Conférences	ROUEN
M.	BODY	Bernard	Professeur Agrégé	GRENOBLE
M.	BOGAERT	Yves	Professeur Agrégé	PARIS
Mme	BONNEFONT	Claire	Professeur Agrégé	CRETEIL
Mme	BORNAZ-VERT	Eliane	Professeur Agrégé	PARIS
M.	BOUCHER	François	Professeur de Chaire Supérieure	TOULOUSE
M.	BOUSCASSE	Jean-Marie	Professeur Agrégé	BORDEAUX
Mme	BRAMOULLE	Laurence	Professeur Agrégé	POITIERS
Mme	BRISSET	Anne Marie	Professeur Agrégée	PARIS
M.	BRUCKER	Christian	Professeur Agrégé	STRASBOURG
Mme	BRUYANT	Francine	Maître de Conférences	REIMS
M.	CANET	Jean François	IA-IPR	MONTPELLIER
M.	CARRON	Christophe	Professeur Agrégé	BORDEAUX
M.	CESARO	Joseph	IA-IPR	NICE
Mme	CHASSAING-KOWALSKA	Anna	Professeur Agrégé	NANCY METZ
Mme	CHOQUER RAOULT	Agnès	Professeur Agrégé	VERSAILLES
Mme	CLAVEL	Sylvaine	Professeur Agrégé	VERSAILLES
M.	CORI	René	Maître de Conférences	PARIS
M.	COUCHOURON	Jean-François	Maître de Conférences	NANCY METZ
Mme	DECHEZLEPRETRE	Nathalie	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	DIAGNE	Malick	Professeur Agrégé	ORLEANS TOURS
M.	DOGBE	Christian	Maître de conférences	CAEN
M.	DOYEN	Jacques	Maître de Conférences	GRENOBLE
M.	DUGARDIN	Thierry	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	DULON	Laurent	Professeur Agrégé	BORDEAUX

M.	DUMAS	Laurent	Maître de Conférences	PARIS
Mme	DUPONCHEL	Domitille	IA-IPR	LILLE
Mme	ERNOULT	Monique	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	ESCOFFIER	Jérôme	Professeur Agrégé	GRENOBLE
M.	FERRAND	Patrick	IA-IPR	LYON
M.	FERRARD	Jean Michel	Professeur de Chaire Supérieure	LYON
Mme	FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences	REIMS
Mme	FONTANEZ	Françoise	Professeur Agrégé	PARIS
Mme	GAUTHERON	Véronique	Maître de Conférences	PARIS
M.	GEOFFRIAU	François	Maître de Conférences	POITIERS
Mme	GERBERT-GAILLARD	Evelyne	Professeur Agrégé	GRENOBLE
M.	GIRAULT	Dominique	Professeur Agrégé	POITIERS
M.	GROISON	Jean Marc	Professeur Agrégé	LYON
M.	GUYONVARCH	Bertrand	Professeur Agrégé	RENNES
M.	HANS	Jean-Luc	Professeur de Chaire Supérieure	BESANCON
M.	HARINGTON	Bruno	Professeur agrégé	MONTPELLIER
M.	HARTMANN	Andreas	Maître de conférences	BORDEAUX
M.	HASSAN	Azzam	Professeur Agrégé	GRENOBLE
Mme	HENROT	Isabelle	Professeur Agrégé	NANCY METZ
M.	HEROULT	François	Professeur Agrégé	PARIS
M.	HERVE	Loïc	Maître de Conférences	RENNES
Mme	JACOB	Chantal	IA-IPR	PARIS
M.	JEDDI	Ahmed	Maître de conférences	NANCY METZ
Mme	KERVADEC	Elisabeth	Professeur Agrégé	RENNES
M.	KHELIF	Anatole	Maître de conférences	PARIS
M.	LABROSSE	Jean	Professeur Agrégé	LYON
Mme	LAGUILLIER	Marie Thérèse	Professeur Agrégé	VERSAILLES
M.	LAPOLE	René	Professeur Agrégé	AMIENS
Mme	LAPOLE	Isabelle	Professeur Agrégé	AMIENS
M.	LASSALLE	Olivier	IA-IPR	LILLE
M.	LE BARS	Michel	Professeur Agrégé	PARIS
M.	LE BIGOT	Jean-Luc	Professeur Agrégé	NANTES
Mme	LE GOFF	Claire	Professeur Agrégé	PARIS
M.	LEBLANC	Jean	Professeur Agrégé	TOULOUSE
M.	LEGROS	Stéphane	Professeur de chaire supérieure	ROUEN
M.	LEHMAN	Eric	Professeur des Universités	CAEN
M.	LEMAIRE	Bernard	Professeur Agrégé	LILLE
M.	LETERRIER	Pierre	Professeur Agrégé	VERSAILLES
Mme	LETHIELLEUX	Claire	Professeur Agrégé	PARIS
Mme	LEWILLION	Martine	IA-IPR	MONTPELLIER
M.	LUCAS	Edouard	Professeur Agrégé	PARIS
M.	MALKI	Saber	Professeur Agrégé	NANCY METZ
Mme	MARBEAU	Jocelyne	Professeur Agrégé	PARIS
M.	MARGIRIER	Jean-Paul	Professeur Agrégé	LYON
M.	MARTEAU	Jean Luc	IA-IPR	LILLE
M.	MENEVIS	Hervé	Professeur Agrégé	PARIS
M.	MERCKHOFFER	René	IA-IPR	VERSAILLES
M.	MERIL	Alex	Professeur des Universités	GUADELOUPE
Mme	MEURISSE	Anne	Professeur Agrégé	LILLE
M.	MICHALAK	Pierre	IA-IPR	VERSAILLES
Mme	MILIN	Sylvie	Professeur Agrégé	VERSAILLES
M.	MOHAN	Shalay	Professeur Agrégé	PARIS
M.	MORIN	François	Professeur Agrégé	ORLEANS TOURS
Mme	MOURGUES	Marie-Hélène	Maître de Conférences	CRETEIL
M.	MOURRET	Bernard	Professeur agrégé	MONTPELLIER
Mme	MOUSSA	Anne	Professeur Agrégée	PARIS
M.	MOUSSA	Jean	IGEN	PARIS
Mme	MUHLRAD-GREIF	Catherine	Maître de Conférences	PARIS
Mme	NOGUES	Maryse	Professeur Agrégé	MONTPELLIER
Mme	NOUVET	Michèle	Professeur Agrégé	CAEN
M.	PAINTANDRE	Stéphan	Professeur Agrégé	TOULOUSE
M.	PARISE	Laurent	Professeur Agrégé	NANCY METZ
Mme	PASSAT	Isabelle	Professeur Agrégé	VERSAILLES

Mme	PAWLOWSKI	Françoise	Professeur Agrégé	BORDEAUX
Mme	PERUCCA	Jannine	Professeur Agrégé	PARIS
M.	PIEDNOIR	Jean Louis	IGEN	PARIS
M.	PIRIOU	Laurent	Maître de Conférences	NANTES
Mme	PLANCHE	Nathalie	Professeur Agrégé	CLERMONT FERRAND
M.	PLANET	Jean-Luc	Professeur Agrégé	TOULOUSE
M.	PUYOU	Jacques	Professeur Agrégé	BORDEAUX
M.	QUAREZ	Ronan	Maître de conférences	RENNES
M.	QUIBEL	Yann	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	QUIBLIER	Philippe	Professeur de Chaire Supérieure	GRENOBLE
M.	RANDRIAMIHAMISON	Louis	Maître de Conférences	TOULOUSE
Mme	RASKINE	Anne	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	REVILLON	Georges	IA-IPR	LYON
M.	ROMBALDI	Jean Etienne	Professeur Agrégé	AIX MARSEILLE
M.	RUPPRECHT	David	Professeur Agrégé	NANCY METZ
M.	SALLAZ	Alain	Maître de Conférences	GRENOBLE
M.	SDIKA	Luc	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	SEIGNOURET	Jean-Louis	Professeur Agrégé	VERSAILLES
M.	SIGWARD	Eric	IA-IPR	LILLE
Mme	TANOH	Hélène	Professeur Agrégé	STRASBOURG
M.	TENTI	Marc	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	THABARET	Jean Paul	IA-IPR	GRENOBLE
Mme	TRAD	Marie-Anne	Professeur de Chaire Supérieure	PARIS
M.	VAN DER OORD	Eric	IGEN	PARIS
M.	VEERAVALLI	Alain	Maître de Conférences	CRETEIL
M.	VIAL	Jean-Pierre	Professeur de Chaire Supérieure	PARIS
Mme	VILLE	Françoise	Maître de Conférences	PARIS
M.	WERQUIN	Philippe	Professeur Agrégé	VERSAILLES
Mme	WIRTH	Martine	Professeur de Chaire Supérieure	PARIS

2. Programme du concours

Le programme des sessions antérieures a été reconduit sans modification. Le texte en vigueur est donc celui paru au B.O. n°8 spécial du 24 mai 2001.

EPREUVES ECRITES

Le programme est formé des titres A et B de l'annexe I

EPREUVES ORALES

Épreuve d'exposé
Le programme est formé du titre A augmenté des paragraphes suivants du titre B de l'annexe I :

1.I. « Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique. »
1.II. « Ensembles, relations, applications. »
1.III. « Rudiments de cardinalité. »
2.I.3. « Structures des ensembles de nombres. »
2.III.5. « Calcul matriciel », alinéa b).
2.V.2. « Configurations », alinéas a) et c).
2.V.3. « Transformations ».
2.V.4. « Emploi des nombres complexes en géométrie », alinéas a), c) et d).
3.I.1. « Suites de nombres réels et de nombres complexes », alinéas a), b), d) et e).
3.I.2. « Fonctions d'une variable réelle ».
3.II.2. « Dérivation », dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
3.II.3. « Intégration sur un intervalle compact », dans ce même cas.
3.II.4. « Étude locale de fonctions », alinéa a).
3.IV.2. « Équations linéaires scalaires », alinéa b).
4.2. « Variables aléatoires », alinéas a) et c).

Épreuve sur dossier
Le programme est formé du titre A de l'annexe I.

UTILISATION DES CALCULATRICES
Circulaire du 16 Novembre 1999 n° 99-186 parue au BOEN n° 42 du 25 Novembre 1999.

ANNEXE I

A. Programmes de l'enseignement secondaire

1. La réunion des programmes de mathématiques des collèges et des lycées d'enseignement général et technologique en vigueur au 1er janvier de l'année du concours et de ceux en vigueur au 1er janvier de l'année précédente.
2. L'utilisation des calculatrices électroniques est défini par les arrêtés du 15 Mai 1997 complétés par la circulaire n° 99-018 du 1.2.1999 parue au BOEN n°6 du 11-02-1999 ainsi que la circulaire du 16-11-1999.

Dans ce cadre, les candidats doivent se munir d'une *calculatrice scientifique programmable,* alphanumérique ou non, et graphique. Ils doivent savoir utiliser leur calculatrice dans les situations numériques et algorithmiques liées au programme. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :

- Savoir programmer une instruction d'affectation.

- Savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres.

- Savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches.

- Savoir programmer une instruction séquentielle, alternative ou itérative.

- Savoir afficher à l'écran la courbe représentative d'une fonction.

Ils doivent en outre munir leur calculatrice de programmes permettant :

- la recherche de solutions approchées d'une équation numérique à une variable,
- le calcul de valeurs approchées d'une intégrale.

B. Programme complémentaire

Comme il est indiqué dans les instructions, les problèmes et les méthodes numériques et les aspects algorithmiques et informatiques (construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leur performance, rédaction méthodique de programmes) sont largement exploités. Dans le texte du programme, ils sont représentés par le signe §.

1. NOTIONS SUR LA LOGIQUE ET LES ENSEMBLES

Aucun exposé de logique formelle n'est envisagé.

I. Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique.

Occurrences libres (ou parlantes) et occurrences liées (ou muettes) d'une variable dans une expression mathématique ; signes mutificateurs usuels ($\int$ …… d… , $\sum$, $\mapsto$, { … | …… } ; $\forall$; $\exists$; etc.) ; mutifications implicites.

Calcul propositionnel : connecteurs logiques ; tables de vérité ; tautologies.

Utilisation des connecteurs et des quantificateurs dans le discours mathématique ; lien entre connecteurs logiques et opérations ou relations ensemblistes.

Pratique du raisonnement mathématique : hypothèses, conclusions, quelques figures usuelles du raisonnement (raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, utilisation d'exemples ou de contre-exemples, etc.) ; pour les énoncés sous forme d'implication, distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, entre proposition directe et proposition réciproque ; cas particuliers de la recherche de lieux géométriques, d'ensembles de solutions d'équations.

II. Ensembles, relations, applications.

Opérations ensemblistes usuelles ; produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
Relations et applications ; lois de composition internes ou externes.

Ensemble des parties d'un ensemble ; image directe ou image réciproque d'une partie par une application ; comportement des opérations d'image directe et d'image réciproque vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Familles d'ensembles ; réunions et intersections « infinies ».

Relations d'ordre ; majorants, borne supérieure…

Ensemble IN des nombres entiers naturels. Toute partie non vide de IN admet un plus petit élément. Raisonnement par récurrence.

Relations d'équivalence ; classes d'équivalence, partition associée, ensemble quotient, compatibilité d'une loi de composition avec une relation d'équivalence (passage au quotient).

Construction de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$.

III. Rudiments de cardinalité.

Équipotence de deux ensembles ; classe des ensembles équipotents à un ensemble donné ; notion de cardinal.

Théorème de Cantor (« aucun ensemble n'est équipotent à l'ensemble de ses parties »).

Fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble ; équipotence entre l'ensemble des parties d'un ensemble E et l'ensemble des applications de E dans {0,1}.

Ensembles finis et infinis.

Ensembles dénombrables : exemples usuels ($\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des suites finies d'entiers, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels, l'ensemble des nombres algébriques, etc.).

Puissance du continu (cardinal de P($\mathbb{N}$) ou de $\mathbb{R}$) ; non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

2. ALGEBRE ET GEOMETRIE

I. Nombres et structures

1. Groupes

a) Groupes, morphismes de groupes. Sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques. Ordre d'un élément ; théorème de Lagrange. Image et noyau d'un morphisme de groupes. Sous-groupes distingués, groupe quotient.
Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Éléments conjugués.

§ b) Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Cycles ; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature d'une permutation, groupe alterné.

2. Anneaux et corps

Anneaux (unitaires), morphismes d'anneaux. Sous-anneaux.

Anneaux commutatifs, anneaux intègres ; idéaux, idéaux principaux ; anneaux quotients. Corps (commutatifs), sous-corps ; caractéristique d'un corps.

3. Structure des ensembles de nombres

a) Anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs (ou rationnels). L'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre ; divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne ; sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux ; théorème de Bezout.

§ b) Nombres premiers ; décomposition en facteurs premiers.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

c) Congruences ; anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, caractérisation des éléments inversibles.

d) Corps des rationnels, corps des réels, corps des complexes.

II. Polynômes et fractions rationnelles

Dans ce chapitre, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Polynômes à une indéterminée

§ a) Algèbre $K[X]$; degré d'un polynôme, terme dominant, polynôme unitaire.

L'anneau $K[X]$ est intègre ; divisibilité dans $K[X]$. Division euclidienne.

Les idéaux de $K[X]$ sont principaux ; théorème de Bezout.

Polynômes irréductibles ; décomposition en facteurs Irréductibles.

PGCD, PPCM ; algorithme d’Euclide.

b) Fonctions polynômes

Racines (ou zéros) d’un polynôme, ordre de multiplicité. Polynômes scindés.

Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes.

Équations algébriques. Relations entre les coefficients et les racines d’un polynôme scindé.

c) Dérivation des polynômes ; formule de Taylor.

d) Théorème de D'Alembert ; polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Fractions rationnelles à une indéterminée

a) Corps K(X) ; forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle.

b) Fonctions rationnelles : pôles, zéros ; ordre d'un pôle ou d'un zéro.

c) Décomposition en éléments simples. Cas du corps $\mathbb{C}$ et du corps $\mathbb{R}$.

d) Exemples simples de problèmes d'élimination.

III. Algèbre linéaire

Dans cette partie, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels. Applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes. Formes linéaires. Espace vectoriel $L(E,F)$, algèbre $L(E)$, groupe linéaire GL(E). Espace vectoriel produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

b) Sous-espaces vectoriels ; image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels , somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs.

c) Familles libres, familles génératrices, bases.

d) Étant donné une application linéaire u de E dans F et un supplémentaire E' de ker u dans E, u définit un isomorphisme de E' sur lm u.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Espaces admettant une famille génératrice finie. Théorème de la base incomplète, existence de bases ; dimension. Dimension d'un sous-espace, rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires. Dimension d'une somme directe.

b) Rang d'une application linéaire ; formule du rang, caractérisation des isomorphismes.

c) Formes linéaires et hyperplans, équation d'un hyperplan.

d) Dualité. Bases associées d'un espace E et de son dual E*. Orthogonal dans E* d'une partie de E, orthogonal dans E d'une partie de E* : dimension de l'orthogonal, double orthogonal.

3. ***Matrices***

a) Espace vectoriel $M_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes. Isomorphisme entre $L(K^q,K^p)$ et $M_{p,q}(K)$.

Produit matriciel, transposition. Algèbre $M_n(K)$; matrices inversibles, groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(K)$. Matrices symétriques, antisymétriques.

b) Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre, ces espaces étant munis de bases ; matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel muni d'une base, matrice d'une famille finie de vecteurs relativement à une base. Matrice de passage (la matrice de passage de la base B à la base C est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans B du j-ième vecteur de C). Effet d'un changement de base(s) sur la matrice d'une application linéaire.

c) Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme.

d) Rang d'une matrice. Utilisation de matrices carrées extraites pour la détermination du rang. Matrices équivalentes. Caractérisation à l'aide du rang. Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice $I_r = (\alpha_{ij})$, définie par les relations $\alpha_{jj} = 1$ si $1 \leq j \leq r$, et $\alpha_{ij} = 0$ dans tous les autres cas. Rang de la transposée d'une matrice.

e) Systèmes d'équations linéaires, rang. Conditions de compatibilité, systèmes de Cramer.

4. Applications multilinéaires, déterminants

a) Définition des applications multilinéaires, des applications symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n, critère d'indépendance.

c) Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Mineurs, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

e) Applications des déterminants, expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible, formules de Cramer ; orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

f) En relation avec la géométrie, application des déterminants à l'étude des systèmes linéaires de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

5. Calcul matriciel

§ a) Exemples de calculs par blocs. Exemples d'emploi de normes matricielles. Conditionnement d'une matrice.

§ b) Opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice ; addition d'un multiple d'une ligne à une autre, multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, échange de deux lignes. Applications à la résolution des systèmes linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées et au calcul du rang.

Algorithme du pivot de Gauss ; pivot partiel, pivot total.

6. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

a) Sous-espaces stables par un endomorphisme. Si u et v commutent, $\mathrm{Im}\, u$ et $\ker u$ sont stables par v. Polynômes d'un endomorphisme ; théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont premiers entre eux,

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

b) Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.

c) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynôme annulant un endomorphisme ; lien avec le spectre.

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Théorème de Cayley-Hamilton.

Endomorphismes diagonalisables ; l'espace est somme directe des sous-espaces propres. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Sous-espaces caractéristiques. Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé peut être trigonalisé : l'espace est somme directe des sous-espaces caractéristiques F_j et il existe une base de chaque F_j telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par u soit triangulaire supérieure ; en outre, la dimension de F_j est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_j. Un tel endomorphisme u s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u = d + n$, où d est diagonalisable, n est nilpotent, et $nd = dn$.

§ d) Valeurs propres d'une matrice carrée, vecteurs (colonnes) propres. Matrices semblables. Diagonalisation, trigonalisation des matrices carrées. Exemples d'emploi de décomposition en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

IV. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

(cf. analyse 3.I.6 espaces préhilbertiens réels ou complexes.)

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espaces euclidiens

a) Isomorphisme canonique avec le dual.

Sommes directes orthogonales. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan. Projecteurs et symétries orthogonales.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes symétriques, antisymétriques.

c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal O(E), groupe des rotations (ou spécial orthogonal) SO(E). Matrices orthogonales. Groupes O(n) et SO(n). Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Changements de base orthonormale.

d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.

Produit vectoriel en dimension 3 ; expression dans une base orlhonormale directe.

2. Géométrie vectorielle euclidienne

a) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal O(E).

b) Dans le plan euclidien orienté (n = 2) : matrice d'une rotation ; angle d'une rotation. Morphisme canonique de IR sur SO(2).

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

c) Dans l'espace euclidien orienté (n = 3) :

Axe et angle d'une rotation. Les demi-tours engendrent SO(3).

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

d) En dimension 2 ou 3 : groupe des similitudes ; similitudes directes.

Rapport d'une similitude, automorphisme orthogonal associé.

3. Espaces hermitiens

a) Sommes directes orthogonales. Projecteurs orthogonaux.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes.

c) Automorphismes unitaires. Groupe unitaire U(E). Groupe U(n) des matrices unitaires d'ordre n.

4. Calcul matriciel et normes euclidiennes

§ a) Calcul de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace et de la distance d'un point à un sous-espace. Application aux problèmes de moindres carrés ; minimisation de $\|AX-B\|^2$, où $A \in M_{n,p}(\mathrm{IR})$ et rang $A = p$.

§ b) Décomposition d'un élément M de $GL_n(\mathrm{IR})$ sous la forme $M = QR$, où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure, par la méthode de Householder.

5. Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens

§ a) Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique (resp. hermitien) dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique (resp. hermitienne) au moyen d'une matrice orthogonale (resp. unitaire).

La plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A est égale à $\sup\limits_{X \neq 0} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$

b) Formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien, formes quadratiques, polarisation. Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique ; réduction dans une base orthonormale.

V. Géométrie affine et euclidienne

Dans ce chapitre, l'étude est placée dans le plan et l'espace.

1. Calcul barycentrique ; repérage

a) Sous-espaces affines ; direction d'un sous-espace affine.

b) Repères affines, coordonnées barycentriques.

c) Parties convexes.

d) Repères cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques. Changement de repère orthonormal.

2. Configurations

a) Cercles dans le plan. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Ensemble des points M dont le rapport des distances à deux points A et B est constant, ou tels que l'angle de droites (ou de demi-droites) (MA, MB) soit constant

b) Sphères. Intersection d'une sphère et d'un plan, de deux sphères.

c) Coniques. Définitions focales, bifocales ; tangente et normale en un point ; ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale ; hyperbole rapportée à ses asymptotes. Équation cartésienne d'une conique ; réduction en repère orthonormal. Équation polaire d'une conique dont un foyer est à l'origine, la directrice associée et l'excentricité étant données.

3. Transformations

a) Applications affines ; effets sur la barycentration et sur la convexité. Application linéaire associée. Projections, affinités, symétries.

b) Groupe des transformations affines. Morphisme canonique du groupe affine sur le groupe linéaire ; groupe des translations, groupe des homothéties-translations. Isomorphisme canonique du stabilisateur d'un point O sur le groupe linéaire.

c) Groupe des isométries, groupe des déplacements. Les réflexions engendrent le groupe des isométries ; dans l'espace, les demi-tours engendrent le groupe des déplacements.

Similitudes planes directes et indirectes.

d) Classification des déplacements et des isométries du plan et des déplacements de l'espace à partir de l'ensemble des points invariants.

e) Exemples de recherche du groupe des isométries laissant globalement invariante une configuration du plan ou de l'espace. Exemples de recherche de transformations affines transformant une configuration en une autre.

4. Emploi des nombres complexes en géométrie

a) Racines de l'unité et polygones réguliers.

b) Adjonction d'un point à l'infini au plan complexe.

c) Transformations $z \mapsto a\bar{z} + b$ et $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

§ d) Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto z - a$, $z \mapsto \mathbf{Arg}(z-a)$, $z \mapsto \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|$ et $z \mapsto \mathbf{Arg}\,\dfrac{z-a}{z-b}$.

Exemples de familles de courbes orthogonales associées à des transformations simples du plan complexe.

3. ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

I. Suites et fonctions

1. Suites de nombres réels et de nombres complexes

a) Suites convergentes, divergentes ; suites extraites.

Opérations algébriques sur les limites. Relations de comparaison : domination (u est dominée par v), prépondérance (u est négligeable devant v) et équivalence (u est équivalente à v). Notations $u = O(v)$, $u = o(v)$ ou $u << v$, et $u \sim v$.

b) Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute suite croissante majorée de nombres réels converge. Suites adjacentes. Développement décimal d'un nombre réel. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

c) Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes converge. De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une suite convergente. Théorème du point fixe pour une application contractante d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

§ d) Étude du comportement asymptotique de suites. Approximation d'un nombre réel ou complexe au moyen de suites : rapidité de convergence et performance d'un algorithme. Accélération de convergence : méthode de Richardson-Romberg.

§ e) Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par une condition initiale.

Approximation d'une solution d'une équation numérique. Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives ; méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et d'ajustement linéaire.

2. Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ *et à valeurs réelles ou complexes.*

a) Limite d'une fonction en un point ; continuité en un point. Opérations sur les limites et sur les fonctions continues. Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point domination, prépondérance et équivalence.

b) Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

3. Espaces vectoriels normés, réels ou complexes

Les applications étudiées dans ce paragraphe sont définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.

a) Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Norme, distance associée, boules. Parties bornées, diamètre d'une partie.

Distance d'un point à une partie non vide. Applications lipschitziennes. Produit d'une famille finie d'espaces normés.
Exemples de normes usuelles sur les espaces de suites et de fonctions.

b) Voisinages d'un point d'un espace vectoriel normé, ouverts, fermés ; adhérence, intérieur et frontière d'une partie, parties denses, points isolés, points d'accumulation.

Distance induite sur une partie ; voisinages d'un point, ouverts et fermés d'une partie.

c) Limite d'une application suivant une partie, continuité en un point.

Applications continues, caractérisation par image réciproque des ouverts ou des fermés. Continuité d'une application composée ; homéomorphismes. Applications uniformément continues.

d) Suites convergentes, divergentes. Caractérisation des points adhérents et des applications continues à l'aide de suites.

e) Caractérisation des applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue. Normes équivalentes.

Exemples de normes matricielles.

f) Opérations algébriques sur les limites. Algèbre des fonctions numériques continues.

Algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, base canonique de cette algèbre.

4. Espaces complets

a) Suites de Cauchy, espaces complets ; $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. Parties complètes ; les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées.

b) Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé. Séries convergentes, divergentes, absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum \|u_n\| < +\infty$). Dans un espace de Banach, critère de Cauchy pour la convergence d'une série, convergence des séries absolument convergentes.

c) Théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace complet.

d) Critère de Cauchy pour les applications (existence d'une limite en un point).

5. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Équivalence des normes. Toute suite de Cauchy est convergente. De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires.

b) Définition (séquentielle) des parties compactes. Les parties compactes sont les parties fermées bornées.
Image continue d'un compact, application aux fonctions numériques. Continuité uniforme d'une application continue sur un compact.

6. Espaces préhilbertiens réels ou complexes

Produit scalaire (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche), norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme.

Théorème de Pythagore. Famille orthonormale, méthode de Schmidt.

Existence d'une base orthonormale dans un espace de dimension finie. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un tel sous-espace.

Exemples de suites de polynômes orthogonaux.

7. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach

Convergence simple, convergence uniforme. Pour des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: convergence uniforme sur tout compact. Continuité et limite d'une application définie comme limite d'une suite uniformément convergente.

Critère de Cauchy de convergence uniforme. L'espace des applications bornées d'un ensemble dans un espace de Banach, muni de la norme uniforme, est complet. Il en est de même pour l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues d'un espace normé dans un espace de Banach.

8. Notions sur la connexité

Parties connexes ; les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image d'une partie connexe par une application continue, théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs ; elle implique la connexité et, dans le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, elle lui équivaut.

II. **Fonctions d'une variable réelle : calcul différentiel et intégral**

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle non réduit à un point et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$

1. Approximation des fonctions sur un segment

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier ; approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions continues affines par morceaux et par des fonctions polynomiales. Interpolation de Lagrange.

2. Dérivation

a) Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

b) Inégalité des accroissements finis pour une fonction continue sur un intervalle et dérivable sur son intérieur ; caractérisation des fonctions constantes et des fonctions lipschitziennes. Prolongement des fonctions de classe C^1 sur un intervalle privé d'un point.

c) Extrémums locaux des fonctions dérivables à valeurs réelles. Théorème de Rolle.

d) Fonction de Classe C^k (k entier naturel ou k infini) Si deux fonctions sont de classe C^k, leur composée l'est encore. Caractérisation des C^k-difféomorphismes parmi les fonctions de classe C^k ($k \geq 1$). Formule de Leibniz. Définition des fonctions de classe C^k par morceaux : une fonction f est dite de classe C^k par morceaux sur un segment $[a,b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des $]a_i,a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe C^k sur $[a_i,a_{i+1}]$; elle est dite de classe C^k par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est de classe C^k par morceaux.

e) Fonctions à valeurs réelles : fonctions convexes. Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1 par la croissance de la dérivée première et par la position de la courbe par rapport aux tangentes.

3. Intégration sur un intervalle compact

Les seules connaissances exigibles portent sur l'intégration des fonctions continues par morceaux.

a) Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notations : $\int_I f(t)dt$; $\int_a^b f(t)dt$.

Linéarité. Si $a \leq b$, $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \| f(t) \| dt$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.
Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.
Approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ par des sommes de Riemann associées à des subdivisions de $[a,b]$.

d) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral : soit f une fonction continue sur I ; pour tout point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant au point a ; inversement, pour toute primitive F de f sur I, et pour tout couple (a,b) de points de I, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
En particulier, pour toute fonction g de classe C^1 sur I, et pour tout couple (a,b) de points de I,

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt.$$

Intégration par parties, changement de variable.

Exemples de calculs de primitives.

e) Inégalité des accroissements finis relative à un couple de fonctions de classe C^1, l'une vectorielle, l'autre réelle. Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe C^{p+1} ; inégalité de Taylor-Lagrange.

§ f) Calcul des valeurs approchées d'une intégrale.
Méthode du milieu (ou des tangentes).
Méthode des trapèzes, méthode de Simpson : majoration du reste. Algorithmes d'approximation d'une intégrale par ces deux méthodes.

4. Étude locale des fonctions

a) Développements limités, opérations sur les développements limités.

b) Exemples simples de développements asymptotiques.

Intégration des relations de comparaison au voisinage d'un point entre des fonctions continues ; intégration des développements limités. Théorème de Taylor-Young (existence d'un développement limité d'ordre p pour une fonction de classe C^p).

5. Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles et logarithmes, fonctions puissances, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

b) Fonctions circulaires directes et réciproques. Fonction $z \to \exp(az)$ où a est complexe.

c) Équations fonctionnelles des fonctions linéaires, exponentielles ; logarithmes et puissances.

6. Intégrales impropres

a) Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Emploi de l'intégration par parties.

b) Intégrales de fonctions positives. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration des relations de prépondérance et d'équivalence au voisinage de $+\infty$: cas des intégrales convergentes, cas des intégrales divergentes.

7. Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Passage à la limite uniforme dans les intégrales de fonctions continues sur un segment : application à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1.

Exemples de passage à la limite dans les intégrales impropres.

b) Continuité et intégration des fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$, où f est continue ; dérivation lorsqu'en outre $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.

Exemples d'étude de fonctions définies par des intégrales.

c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique : normes associées.

III. Séries

1. Séries de nombres réels ou complexes

a) Séries à termes positifs. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence ; cas des séries convergentes, cas des séries divergentes.

Comparaison à une série géométrique : règles de Cauchy et de D'Alembert.

Comparaison à une intégrale impropre, Convergence des séries de Riemann ; comparaison à une série de Riemann.

b) Séries à termes réels ou complexes. Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

c) Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire. Série produit de deux séries absolument convergentes :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

d) Exemples d'encadrement ou d'évaluation asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

§ e) Recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

2. Séries de fonctions

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$.

a) Convergence simple, convergence uniforme sur un ensemble d'une série de fonctions ; convergence normale (pour la norme uniforme).

b) Continuité et limite en un point de la somme d'une série uniformément convergente. Intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur un segment ; application à la dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1.

c) Exemples d'étude de fonctions définies par des séries.

3. Séries entières

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Séries entières d'une variable complexe ; rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence, convergence normale sur tout compact du disque de convergence.

b) Séries entières d'une variable réelle : intégration et dérivation terme à terme dans l'intervalle (ouvert) de convergence.

Développement en série entière de e^x, In$(1 + x)$ et $(1 + x)^\alpha$, où α est réel.

c) Définition de $\exp z$ (ou e^z), $\cos z$ et $\sin z$ pour z complexe. Exponentielle d'une somme, extension des formules de trigonométrie.

4. Séries de Fourier

a) Polynômes trigonométriques ; orthogonalité des fonctions $x \to \exp(inx)$. Coefficients et série de Fourier d'une fonction f 2π-périodique continue par morceaux à valeurs complexes (expression sous forme exponentielle, expression en cosinus et sinus). Sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\mathbf{e}^{ikx}$ de la série de Fourier de f ; propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique.

b) Lorsque f est continue par morceaux, convergence de S_n vers f en moyenne quadratique ; formule de Parseval. Théorème de Dirichlet ; convergence de $S_n(x)$ vers la demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point x lorsque f est de classe C^1 par morceaux. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux.

5. Emploi des séries entières et des séries de Fourier

Exemples de recherche de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle.

§ Exemples d'utilisation de tels développements pour obtenir des valeurs approchées d'une fonction.

Exemples d'emploi de séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

IV. Équations différentielles

1. Systèmes linéaires d'ordre 1

a) Écriture matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ où A (respectivement B) désigne une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (théorème admis). Dimension de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation $X' = A(t).X$. Méthode de variation des constantes.

b) Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme ; application au problème de Cauchy. Résolution du système $X' = AX$ par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire.

2. Équations linéaires scalaires

a) Équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Système d'ordre 1 associé, étude du problème de Cauchy ; solutions de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation sans second membre associée ne s'annulant pas sur I.

b) Équations linéaires à coefficients constants. Dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Cas où le second membre est une exponentielle polynôme.

3. Notions sur les équations non linéaires

a) Solutions d'une équation différentielle $x' = f(t,x)$ (resp. $x'' = f(t,x,x')$), où f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

§ b) Recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

c) Résolution des équations des types suivants (en liaison avec la géométrie) : équation associée à une forme différentielle exacte, équation à variables séparables, équation homogène :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

d) Exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction (en liaison avec des propriétés d'invariance), d'échange de la variabIe et de la fonction, de paramétrages.

§ e) Exemples d'étude qualitative des courbes intégrales d'une équation différentielle. Exemples de recherche des courbes intégrales d'un champ d'éléments de contact ou d'un champ de vecteurs dans le plan.

V. Notions sur les fonctions de plusieurs variables réelles

1. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

a) Limite, continuité, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Applications de classe C^1 (ou continûment différentiables).
b) Développement limité à l'ordre 1 d'une application de classe C^1 ; différentielle, matrice jacobienne, jacobien. Si deux applications sont de classe C^1, leur composée l'est encore ; difféomorphismes. Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe C^1). Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe C^1. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1 ; caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe.

c) Dérivées partielles d'ordre k ; théorème de Schwarz. Définition des applications de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (k entier naturel ou k infini). Si deux applications sont de classe C^k, leur composée l'est encore ; définition des C^k-difféomorphismes $(k \geq 1)$

d) Gradient d'une fonction numérique de classe C^1, points critiques. Formule de Taylor-Young pour une fonction numérique de classe C^1. Étude de l'existence d'un extrémum local (c'est-à-dire d'un maximum local ou d'un minimum local) d'une fonction numérique de deux variables de classe C^2 en un point critique où $rt - s^2 < 0$

2. Calcul intégral

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions de ce paragraphe.

a) Champs de vecteurs. Divergence, rotationnel. Intégrales curvilignes. Potentiel scalaire ; condition nécessaire et suffisante d'existence pour un champ de classe C^1 sur un ouvert étoilé.

b) Intégrales doubles et intégrales triples. Linéarité, croissance ; additivité par rapport aux ensembles. Calcul par intégrations successives. Changements de variables ; passage en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques. Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

VI. Notions de géométrie différentielle

1. Courbes et surfaces

L'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour ce paragraphe sont admises.

a) Définitions diverses d'une courbe (plane ou non) et d'une surface, par paramétrages ou par équations.

b) En un point régulier ; tangente à une courbe, plan normal ; plan tangent à une surface, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

c) Étude locale d'une courbe paramétrée plane : position de la courbe par rapport à une droite ; concavité en un point birégulier, rebroussements, inflexions. Étude de branches infinies. Construction de courbes paramétrées.

d) Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace : plan osculateur en un point birégulier, étude locale en un point trirégulier.

e) Enveloppe d'une famille de droites dans le plan, donnée par une équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, sur un intervalle où $ab' - ba'$ ne s'annule pas.

f) Étude des courbes planes définies par des coordonnées polaires : étude locale, comportement asymptotique, construction.

2. Propriétés métriques des courbes planes

Longueur d'un arc paramétré de classe C^1, abscisse curviligne. Pour un arc birégulier du plan orienté, repère de Frenet, courbure, centre de courbure, développée, développantes.

3. Cinématique du point

a) Vitesse, accélération. Trajectoire, loi horaire. Moment cinétique, dynamique. Énergie cinétique.

b) Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, mouvements circulaires. Mouvements à accélération centrale ; oscillateurs harmoniques, mouvement des planètes.

4. Probabilités et statistiques

1. Espaces probabilisés

Expériences aléatoires . Evénements. Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste à propos des opérations sur les événements.

Tribus. Probabilités. Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales ; formule de Bayes. Indépendance (en probabilité) d'événements ; indépendance mutuelle d'un nombre fini d'événements ; indépendance deux à deux.

Les candidats devront savoir utiliser sur des exemples simples la formule donnant la probabilité d'une réunion finie d'événements (formule de Poincaré, ou de crible).

La théorie des espaces probabilisés produits n'est pas au programme.

Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les espaces probabilisés.

2. Variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire réelle, ou plus généralement à valeurs dans IR^n. Evénements liés à une variable aléatoire. On admettra que la somme et le produit de deux variables aléatoires sont des variables aléatoires.

Les propriétés générales des variables aléatoires sont hors programme. L'objectif est la mise en fonctionnement de ce concept sur les exemples décrits dans les trois alinéas qui suivent. La tribu borélienne de IR n'est pas au programme.

a) Variables aléatoires réelles discrètes

Loi de probabilité. Fonction de répartition $F(x)=P[X \leq x]$.

Moments : espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type.

Variables centrées, variables réduites.

Variable aléatoire y = g(X) fonction d'une variable aléatoire discrète X, où g est définie sur l'ensemble des valeurs de X.

Lois discrètes usuelles : loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.

b) Vecteurs aléatoires (à valeurs dans R^n) discrets. Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans IR^2. Lois marginales.
Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires réelles.
Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans IR^n. Indépendance de n variables aléatoires réelles.
Linéarité de l'espérance mathématique. Espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires.
Covariance. Coefficient de corrélation linéaire. Stabilité pour la somme des lois binomiales, des lois de Poisson.

Dans de nombreuses situations, on rencontre des exemples simples de fonctions de plusieurs variables aléatoires (sommes, produits). On admettra que si X1,…, Xn sont indépendantes, toute fonction de (X1,…, Xp) est indépendante de toute fonction de (Xp+1,…, Xn). Aucune théorie générale des fonctions de plusieurs variables aléatoires n'est au programme.
c) Variables aléatoires à densité
On dit qu'une variable aléatoires X à valeurs réelles admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

où f est une fonction à valeurs réelles positives ayant un nombre fini de points de discontinuité et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Moments, espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type. Variable centrées, variables réduites.
Exemples simples de fonctions d'une variable aléatoire (tels que aX + b, X^2 , exp X…). Lois définies par une densité usuelle : loi uniforme, exponentielle, normale (ou de Laplace-Gauss). Densité d'un vecteur aléatoire à valeurs dans IR^2. Indépendance de deux variables aléatoires réelles à densité. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur ces questions.

3. Convergence des suites de variables aléatoires. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (cas des variables discrètes et des variables à densité).

Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres.
Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale..
Approximation de la loi binomiale par la loi de Gauss, par la loi de Poisson.
Enoncé du théorème limite central.
L'étude de la convergence en loi n'est pas au programme.

4. Notions de statistiques.

a) Statistique descriptive : paramètres de position (moyenne, médiane, quantiles, modes) et de dispersion (écart-type, variance). Divers modes de représentation graphique.
b) Echantillons. Intervalle de confiance d'une moyenne ou d'une fréquence.
c) Tests d'hypothèse ; les deux types de risque d'erreur.
d) Tests de paramètres : estimation du paramètre d'une loi binomiale, de la moyenne m d'une loi normale. Test unilatéral, bilatéral.

Comparaison de deux moyennes.

ANNEXE II

Instructions et commentaires

Ils figurent au BOEN n° 33 du 26 septembre 1991 et au BO Spécial n°5 du 21 octobre 1993.

Pour les épreuves écrites les candidats doivent se munir de calculatrice afin de s'en servir lorsque ce sera autorisé.

Pour les épreuves orales les calculatrices personnelles sont interdites. Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du C.A.P.E.S.

3. Statistiques

3.1 Evolution et résultats globaux

Année	Postes	Inscrits	Présents aux Deux épreuves écrites	Admissibles	Présents aux deux épreuves orales	Admis
CAPES 1999	945	8950	7332	2274	2174	945
CAFEP	210	1055	847	107	105	57
CAPES 2000	890	8038	6750	2067	1930	890
CAFEP	206	1130	1030	145	142	78
CAPES 2001	990	6972	5676	2109	1946	990(*)
CAFEP	215	1095	889	200	194	113
CAPES 2002	1125	6166	4948	2213	2065	1125(*)
CAFEP	230	906	745	192	189	118
CAPES 2003	1195	5755	4428	2328	2174	1195
CAFEP	230	846	636	214	209	116
CAPES 2004	1003	5604	4194	2040	1900	1003
CAFEP	177	933	658	205	192	103

(*) *En 2001 et 2002, des listes complémentaires avaient été publiées.*

La décroissance du nombre des candidats s’est à peu près interrompue. Comme le nombre des postes offerts au CAPES a été diminué (d’environ 16%), le ratio nombre de candidats/nombre de postes a augmenté, pour atteindre environ 4,2.

Le jury est pour sa part conscient de ses obligations, dont l’une est de proposer des candidats de qualité, et une autre est de proposer autant que possible de pourvoir tous les postes offerts. Il en découle l’obligation de garder au concours un aspect suffisamment attractif : tant en ce qui concerne les épreuves écrites que les épreuves orales, le but poursuivi est de donner aux candidats le sentiment d’une évaluation juste et exigeante, mais qui reste en même temps humaine. C’est par exemple dans cet esprit que le jury s’efforce systématiquement de rassurer individuellement les candidats qui, lors des épreuves orales, expriment leur anxiété et leur manque de confiance en eux, et c'est également dans cet esprit que l'accueil de tous les candidats est organisé.

Les barres d’admissibilité et d’admission restent identiques pour les deux concours (CAPES et CAFEP). Ceci nous a conduit cette année encore à ne pas proposer pour le CAFEP une liste de la longueur maximale autorisée.

3.2 Statistiques par catégories

C.A.P.E.S.

Catégorie (situation professionnelle)	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Divers	608	279	118	47
Elève IUFM	1870	1799	905	522
Etudiant	1105	886	533	263
Cadre conv. collectives	198	72	34	12
Sans emploi	812	450	201	71
Vacataire second degré.	115	82	36	17
Maître auxiliaire	85	64	25	7
Contractuel second degré	634	440	141	46
M.I. et S E	177	122	47	18
Total	5604	4194	2040	1003

Caractères divers	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Femmes	2468	1996	871	465
Hommes	3136	2198	1169	538
Français et Union Européenne	5591	4193	2040	1003
U.E. non français	60	28	12	7
Etrangers hors U.E.	13	1	0	0
Moins de 30 ans	4385	3583	1796	917
Moins de 25 ans	2494	2236	1214	669

C.A.F.E.P.

Catégorie (situation professionnelle)	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Divers	208	199	88	62
Etudiant	113	77	34	9
Enseignant titulaire Educ.Nationale	13	5	1	0
Agent non titulaire Educ.Nationale	344	248	44	20
Enseignement privé	35	20	3	0
Agent fonction publique état	18	10	4	1
Hors fonction publique ou sans emploi	202	99	31	11
Total	933	658	205	103

Caractères divers	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Femmes	563	424	114	64
Hommes	370	234	91	39
Moins de 30 ans	690	538	167	91
Moins de 25 ans	305	281	104	63

On peut remarquer que la proportion de femmes est plus élevée pour le CAFEP que pour le CAPES ; cette proportion évolue pendant les deux concours de manière analogue :
- parmi les inscrits, les femmes sont *plus* nombreuses en proportion à venir effectivement passer les épreuves écrites (pour les deux concours) ;
- parmi les présents à l'écrit, les femmes sont *moins* nombreuses en proportion a être admissibles (pour les deux concours) ;
- parmi les admissibles, les femmes sont *plus* nombreuses en proportion a être reçues (pour les deux concours).

3.3 Résultats par académie

C.A.P.E.S.

Académie	Inscrits	Présents aux 2 épreuves écrites	Admissibles	Admis
Aix-Marseille	308	226	104	54
Amiens	147	102	44	23
Besançon	111	85	55	27
Bordeaux	238	193	100	53
Caen	113	94	53	20
Clermont-Ferrand	75	59	41	22
Corse	27	15	2	1
Dijon	154	125	68	31
Grenoble	218	167	88	47
Guadeloupe	95	65	11	5
Guyane	12	4	1	1
Lille	419	324	157	73
Limoges	54	44	17	8
Lyon	286	221	117	61
Martinique	58	32	5	1
Montpellier	284	227	92	47
Nancy-Metz	183	130	64	30
Nantes	270	210	98	47
Nice	169	131	51	18
Orléans / Tours	125	102	48	28
Paris / Créteil / Versailles	1059	702	350	166
Poitiers	145	124	67	32
Reims	101	76	45	22
Rennes	251	203	106	43
Réunion	72	48	21	15
Rouen	157	120	50	25
Strasbourg	159	123	60	32
Toulouse	314	242	125	71

C.A.F.E.P.

Académie	Inscrits	Présents aux 2 épreuves écrites	Admissibles	Admis
Aix-Marseille	35	22	11	4
Amiens	14	8	5	1
Besançon	20	10	3	2
Bordeaux	42	35	7	3
Caen	15	12	4	4
Clermont-Ferrand	14	6	3	1
Corse	0	0	0	0
Dijon	17	8	0	0
Grenoble	48	37	14	8
Guadeloupe	3	1	0	0
Guyane	1	1	0	0
Lille	89	64	21	9
Limoges	4	2	0	0
Lyon	43	32	20	13
Martinique	5	1	0	0
Montpellier	42	23	6	1
Nancy / Metz	23	15	8	3
Nantes	116	100	26	11
Nice	24	17	2	2
Orléans / Tours	14	11	2	2
Paris / Créteil / Versailles	155	102	27	13
Poitiers	10	6	4	3
Reims	11	8	4	1
Rennes	113	82	21	13
Réunion	3	3	0	0
Rouen	13	8	1	1
Strasbourg	22	17	5	4
Toulouse	37	27	11	4

3.4 Répartition des notes

La barre d'admissibilité a été fixée à 7,2/20 (7,1/20 en 2003 , 7,2/20 en 2002 , 7,4/20 en 2001)

Épreuves écrites du C.A.P.E.S.

Histogramme cumulé (notes sur 20)									
	Total			première épreuve			seconde épreuve		
	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis
20	0	0	0	4	4	4	3	3	3
19	11	11	10	17	17	15	27	27	24
18	66	66	61	148	148	123	130	130	110
17	174	174	151	300	300	251	260	260	217
16	247	247	214	385	385	319	346	346	284
15	346	346	296	439	439	358	404	404	326
14	454	454	384	549	549	433	499	499	392
13	583	583	479	675	674	513	648	648	491
12	761	761	598	826	824	608	786	786	567
11	956	956	704	1020	1017	697	999	999	676
10	1210	1210	808	1261	1247	793	1263	1247	788
9	1477	1477	889	1548	1489	861	1560	1509	875
8	1811	1811	962	1899	1731	924	1861	1715	934
7	2196	2040	1003	2246	1888	964	2261	1906	978
6	2575	2040	1003	2615	1976	990	2602	1994	998
5	2936	2040	1003	2959	2020	1002	2948	2029	1002
4	3278	2040	1003	3331	2036	1003	3261	2037	1002
3	3596	2040	1003	3635	2039	1003	3539	2040	1003
2	2869	2040	1003	3961	2040	1003	3839	2040	1003
1	4120	2040	1003	4235	2040	1003	4130	2040	1003
0	4194	2040	1003	4325	2040	1003	4202	2040	1003

Les quartiles, calculés sur l'ensemble des présents, et en note sur 20, sont:

10,7,4 pour la première épreuve
10,7,4 pour la seconde épreuve

Ils sont plus espacés que les années précédentes ; l'étalement des notes de l'écrit a donc été plus important, et notamment le nombre de copies recevant de très bonnes notes a sensiblement augmenté ; cependant, le poids de l'oral reste statistiquement supérieur à celui de l'écrit, les intervalles inter-quartile étant supérieurs à l'oral (respectivement 8 et 7 points aux deux épreuves orales, contre 6 et 6 aux deux épreuves écrites)

Épreuves écrites du C.A.F.E.P.

Histogramme cumulé (notes sur 20)									
	Total			première épreuve			seconde épreuve		
	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis
20	0	0	0	1	1	1	0	0	0
19	1	1	1	1	1	1	2	2	2
18	3	3	3	9	9	8	6	6	5
17	8	8	7	23	23	20	14	14	12
16	17	17	14	28	28	25	20	20	17
15	23	23	19	33	33	29	24	24	21
14	26	26	22	43	43	36	33	33	27
13	42	42	34	50	50	40	43	43	34
12	52	52	43	59	59	47	63	63	45
11	72	72	57	77	77	55	82	82	56
10	98	98	71	103	100	64	112	111	69
9	129	129	85	146	136	81	146	140	82
8	164	164	93	184	159	90	191	167	90
7	221	205	103	240	183	98	232	184	95
6	289	205	103	297	193	101	290	197	100
5	360	205	103	364	200	102	358	204	103
4	417	205	103	429	203	103	425	204	103
3	499	205	103	499	205	103	478	205	103
2	562	205	103	590	205	103	557	205	103
1	639	205	103	657	205	103	643	205	103
0	658	205	103	678	205	103	661	205	103

Les quartiles, calculés sur l’ensemble des présents, et en note sur 20, sont:

8,5,2 pour la première épreuve
8,5,2 pour la seconde épreuve

Épreuves orales et total général des candidats admissibles, C.A.P.E.S. et C.A.F.E.P.

notes sur 20, effectifs cumulés sur les admissibles (adm) et les reçus

	CAPES						CAFEP					
	Total général		Oral 1 (exposé)		Oral 2 (dossier)		Total		Oral 1 (exposé)		Oral 2 (dossier)	
	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus
20	0	0	53	52	14	14	0	0	4	4	4	4
19	0	0	107	106	36	36	0	0	9	8	6	6
18	5	0	177	174	73	71	1	1	19	19	9	9
17	19	19	262	253	110	105	3	3	25	24	16	16
16	57	57	353	332	178	167	5	5	32	30	27	27
15	124	124	461	421	262	242	15	15	45	43	36	34
14	239	239	569	511	373	332	24	24	58	56	47	43
13	376	376	671	584	501	435	29	29	72	65	64	54
12	581	581	802	662	633	522	51	51	81	71	76	65
11	821	821	926	731	779	613	75	75	93	79	94	75
10	1113	1003	1054	803	938	706	103	103	104	85	112	85
9	1350	1003	1161	849	1082	780	124	103	116	88	124	90
8	1579	1003	1306	890	1276	856	155	103	133	94	147	96
7	1728	1003	1406	919	1403	895	181	103	142	97	155	98
6	1841	1003	1518	946	1527	935	187	103	154	100	161	100
5	1888	1003	1586	964	1610	953	191	103	162	101	169	103
4	1900	1003	1658	979	1701	975	192	103	171	102	175	103
3	1900	1003	1734	990	1767	993	192	103	179	103	183	103
2	1900	1003	1814	999	1838	997	192	103	184	103	187	103
1	1900	1003	1881	1002	1893	1002	192	103	188	103	191	103
0	1900	1003	1902	1003	1900	1003	192	103	192	103	192	103

Quartiles pour le CAPES :
14, 10, 6 pour l'épreuve d'exposé ; 13, 9, 6 pour l'épreuve sur dossier.

Quartiles pour le CAFEP :
14, 10, 6 pour l'épreuve d'exposé ; 13, 10, 8 pour l'épreuve sur dossier.

Les derniers reçus, pour les deux concours, avaient un total de 10,2/20.

4. Les épreuves écrites

Les épreuves écrites ont eu lieu dans la première semaine du mois de mars 2004.

La proportion des candidats ayant abandonné à l'issue de la première épreuve reste comparable à celle observée les années précédentes. Environ 150 candidats ont une note à la première épreuve et ont été absents à la seconde épreuve, soit entre 3 et 4%. Nous trouvons aussi quelques candidats absents à la première épreuve, mais qui sont venus composer le lendemain.

Il est rappelé que l'absence à une épreuve entraîne l'élimination du candidat. Le retard est aussi une cause d'élimination, les candidats arrivant après la distribution des sujets n'étant pas autorisés à composer.

La définition des épreuves proprement dites, les buts généraux qu'elles poursuivent, ainsi que le programme auquel elles sont limitées, sont détaillées dans les documents officiels (voir la partie qui leur est consacrée dans le rapport).

Les correcteurs élaborent leurs grilles de correction lors d'une réunion plénière, tenue après qu'ils aient eu le temps d'analyser les sujets et de lire un échantillon de copies. Chaque copie est ensuite corrigée deux fois, de manière totalement indépendante. Les deux correcteurs jumelés se concertent à la fin de leur travail pour décider de la note finale.

Aucun commentaire, aucune annotation particulière ne figure sur les copies. Seule la note finale après harmonisation y est inscrite. Les candidats qui souhaitent après coup revoir leur travail pour mieux comprendre le résultat obtenu peuvent, conformément aux dispositions de la loi n° 78.753 du 17 juillet 1978, obtenir satisfaction en s'adressant à la D.P.E qui conserve les copies pendant un an à cet effet.

De manière générale, les sujets des épreuves écrites sont construits dans le but de discriminer l'ensemble des candidats, des meilleurs aux plus faibles ; c'est pourquoi de très bonnes notes ont pu être attribuées à des copies n'abordant pas, et même de loin, l'ensemble du sujet. Ce fait que l'on peut trouver contestable s'explique aussi par le souci qu'ont les auteurs de sujets de construire des problèmes offrant un contenu suffisamment construit, notamment aboutissant à un ou des résultats significatifs, et aussi la nécessité de ne pas trop centrer le texte sur une partie trop réduite du programme.
Les questions qui recevront un poids particulièrement significatif dans le classement des candidats ne sont pas distinguables dans l'énoncé (d'autant qu'elles ne s'imposent parfois qu'au moment de la correction des copies), ce qui empêche d'estimer raisonnablement une note à la lecture d'une copie isolée.

5. Les épreuves orales

5.1 Organisation

Elles ont eu lieu du 25 juin au 18 juillet 2004 au lycée Lakanal (Sceaux). Les interrogations avaient lieu tous les jours, dimanches et quatorze juillet inclus. Une pause a eu lieu à mi-parcours du 5 au 8 juillet.
Le jury était séparé en 22 commissions de trois personnes. La composition de ces commissions est déterminée en tenant compte de l'obligation de croiser les compétences, ce qui conduit à faire travailler ensemble des personnes intervenant aux divers niveaux possibles, enseignement secondaire, enseignement post-baccalauréat, enseignement supérieur, université

et IUFM, inspection pédagogique régionale. La présence de personnels enseignant en IUFM fait pour chaque cas l'objet d'une réflexion appropriée, le but poursuivi étant à la fois d'éviter autant que possible le « mélange des genres » et d'éviter de trop distendre les liens avec les centres de formation. Cette remarque vaut aussi, malgré l'anonymat, pour la correction des épreuves écrites.
Les candidats sont convoqués en début d'après-midi pour l'épreuve d'exposé et le lendemain matin pour l'épreuve sur dossier. Ils passent devant deux commissions jumelées qui échangent les candidats pour la deuxième épreuve. Chaque commission fait passer les deux types d'épreuves. Un membre de la présidence accueille les candidats avant chaque épreuve afin d'en préciser les modalités et rappeler quelques instructions à son sujet.
Les candidats pouvaient fournir une adresse électronique lors de leur inscription. Immédiatement après signature de la liste des admissibles, les résultats ont été transmis aux adresses connues, ce qui a permis aux candidats dont l'adresse était encore en état de fonctionner de connaître leur résultat immédiatement après la signature de la liste.

Les références des textes officiels décrivant la forme des épreuves orales sont rappelées dans la partie 1.2 de ce rapport.

5.2 Conseils pratiques.

Les demandes de déplacements ou reports de la date de la convocation ne peuvent être éventuellement pris en considération par la présidence du jury que dans les deux cas qui suivent :
- coïncidence entre deux convocations à des concours de recrutement de l'Education Nationale auxquels le candidat est simultanément admissible (CAPES et agrégation, ou CAPLP, ou CRPE par exemple)
- cas de force majeure, maladie, ou événement familial d'importance majeure.

Lorsque ces demandes sont prises en considération, il n'est pas toujours possible d'y répondre favorablement. Réaliser les arrangements correspondants *n'est pas* une obligation du jury. La convocation aux épreuves orales comporte un accusé de réception à renvoyer obligatoirement, par retour du courrier, au président du jury. De trop nombreux candidats compliquent et accroissent la tâche de la présidence en négligeant cette obligation. L'organisation quotidienne des convocations ne permet en effet de tenir compte de demandes légitimes de déplacement ou report de convocation en procédant à des échanges que si la présidence du jury est informée de la présence ou l'absence prévue par chaque candidat admissible.

Il est rappelé aux candidats que l'adresse qu'ils fournissent lors de leur inscription doit être une adresse permanente, valable pour toute la durée des épreuves et pour la phase d'affectation. Ils doivent éventuellement prendre toute disposition pour que le courrier puisse les atteindre pendant toute la période concernée (cf. B.O. spécial n° 13 du 31 août 1995, p. 13).

Une tenue vestimentaire correcte est souhaitable : ce qui est convenable en villégiature ne l'est pas nécessairement devant le jury d'un concours de recrutement. L'utilisation des téléphones portables est interdite dans les locaux du concours, tant pour éviter d'éventuelles fraudes que pour ne pas déranger les candidats par des sonneries intempestives.

Les oraux sont publics. Le nombre important des visiteurs conduit la présidence du jury à réglementer leurs déplacements dans les locaux du concours. Ils ne peuvent y pénétrer que pour accompagner une vague de candidats dans les salles de commission et ne doivent en aucun cas parler aux candidats ou stationner dans les couloirs. Afin de ne pas trop perturber ni les candidats ni le bon fonctionnement du concours, le nombre des visiteurs est limité à au plus deux dans la même salle de commission.

Le CAPES et le CAFEP sont des concours et non des examens ; comme à l'écrit, la note d'oral sert à classer les candidats les uns par rapport aux autres. Cette note a une valeur relative et ne peut refléter ce qui serait la valeur objective d'une épreuve. Il est difficile voire impossible dans les faits pour le candidat de s'évaluer lui-même, et donc de prévoir la note qu'il recevra.

Les notes font l'objet de deux saisies informatique indépendantes, suivies d'une confrontation des deux saisies et de l'édition de listes soumises aux commissions pour vérification. Ces dispositifs rendent l'hypothèse d'une erreur de transmission improbable autant qu'il est humainement possible.

5.3 L'évaluation des épreuves orales

Á un concours de recrutement de l'enseignement secondaire, l'on se trouve au croisement d'exigences de nature assez diverses.
On pourrait se demander pourquoi l'évaluation des compétences purement disciplinaires est présente dans un tel concours, puisque celui-ci s'adresse aux titulaires d'une licence, et que les candidats ont ainsi déjà fait leurs preuves en ce domaine. Cette position mérite d'être discutée, et réfutée, avec soin.
Les licences délivrées par des systèmes de formations assez largement autonomes sont loin d'être uniformes, ce qui justifie déjà le maintien de la présence d'une évaluation disciplinaire au sein du CAPES. De plus, les licences ne peuvent pas toujours suffire en elles-mêmes si leur contenu n'a pas été prévu de manière spécifique pour convenir à un futur enseignant du secondaire. Enfin, il est prévu que certaines personnes, quoique non titulaires d'une licence, ont le droit se présenter au concours. Tous ces facteurs plaident pour le maintien d'une évaluation disciplinaire forte dans les épreuves du CAPES.
Par leur position professionnelle, une majorité des interrogateurs aux épreuves orales sont naturellement attentifs en premier lieu au contenu proprement disciplinaire des prestations. En composant les commissions de manière à varier au mieux les points de vue, il est possible de faire en sorte que la capacité proprement professionnelle soit correctement prise en compte. Même si la vérification finale de l'aptitude à « tenir » devant les élèves repose sur l'évaluation du stage, il est demandé au candidat, lors des deux épreuves orales, de montrer qu'il dispose des qualités nécessaires en matière de communication et de présence devant les auditeurs que sont les membres du jury.

Il n'y a pas de grille chiffrée d'évaluation pour les épreuves orales ; l'on peut simplement définir trois types de compétences pour lesquelles une insuffisance flagrante amène la commission à abaisser la note de manière significative ou déterminante :

- Les compétences en communication : élocution, clarté, attitude envers la commission et capacité de prendre en compte les questions, présentation du tableau, maîtrise du temps, de l'écrit au tableau, de la calculatrice et du rétroprojecteur, etc.
- Les compétences disciplinaires et techniques : l'absence de propositions ou d'affirmations mathématiquement inexactes, la présence relativement au thème traité de connaissances et de résultats cohérents, l'absence de lacune fondamentale relativement à ce thème, le respect des consignes associées au thème et notamment celles concernant l'usage des calculatrices.

- Les compétences de nature pré-professionnelle : connaissance des programmes[1], capacité à construire des exposés et des choix d'exercices adaptés et progressifs, maîtrise à un niveau suffisant des propositions, démonstrations, solutions que le candidat propose de lui-même.

5.4 Première épreuve : exposé sur un thème donné.

Le texte qui suit s'appuie sur la note parue dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993, qui définit les épreuves du CAPES externe de mathématiques.

La première épreuve orale dure 45 minutes réparties en :

- 25 minutes pour l'exposé, le candidat gère son temps et sa présentation comme il l'entend, le jury n'intervenant pas sur le contenu, et n'interrompant en aucune manière le candidat, sauf éventuellement en cas de problème pratique.
- 20 minutes d'entretien avec la commission.

Les candidats tirent au sort deux thèmes d'exposé et en choisissent un. Ils disposent de deux heures pour préparer l'épreuve. Ils ne disposent d'aucun document autre que les programmes et les instructions relatives au concours.
Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils peuvent emprunter à la bibliothèque du CAPES une calculatrice programmable scientifique et graphique. La liste des modèles proposés figure en partie **V.3** de ce rapport.
Le programme de cette épreuve (cf. B.O. spécial n° 8 du 24 mai 2001 et partie **I.2** de ce rapport) est extrait du programme de l'écrit du concours.
Les candidats peuvent faire appel à l'intégralité du programme complémentaire (titre B) au cours de cette épreuve, que ce soit pendant leur exposé ou pendant l'entretien avec le jury. Cependant, aucun thème proposé ne peut porter sur les paragraphes extraits du programme complémentaire complétant le programme de cette épreuve (voir partie **I.2**), ni a fortiori sur d'autres points du programme complémentaire. Pendant l'entretien, le jury a toute latitude pour interroger le candidat sur les programmes de l'enseignement secondaire (titre A, partie **I.2**). Toute notion abordée par le candidat peut aussi faire l'objet de questions : il est attendu d'un futur enseignant qu'il ne présente à ses élèves que des notions dont il peut parler de manière un tant soit peu construite; par conséquent, une allusion ou une ouverture sur un point hors du programme de cette épreuve n'est susceptible de valoriser le travail du candidat que si elle repose sur des connaissances suffisamment cohérentes, et si elle s'inscrit de manière logique comme un prolongement acceptable devant une classe du sujet traité.
Les thèmes d'exposé proposés forment un ensemble couvrant le programme dans son intégralité et les couplages sont conçus de manière à proposer un vrai choix au candidat, deux thèmes jugés trop proches étant normalement écartés.
L'organisation actuelle du concours ne permet pas l'évaluation des compétences des candidats en matière de TICE au sens ou il n'y a pas d'épreuve devant ordinateur. Cette dimension de l'enseignement est abordée à travers l'usage de calculatrices rétroprojetables, dont la puissance permet d'aborder l'usage élémentaire de tableurs, ainsi que de logiciels –il est vrai rudimentaires- de géométrie.
Pour une partie, de plus en plus importante, des sujets, l'illustration de telle ou telle propriété sur une calculatrice est expressément conseillée dans l'intitulé du sujet. Il est vivement conseillé aux candidats de prendre en compte ce conseil.

[1] Il n'est pas attendu de la part des candidats une connaissance détaillée, excessivement précise des programmes en vigueur ; néanmoins, les confusions ou lacunes les plus grossières sont considérées comme des points négatifs et sont relevées.

5.5 Deuxième épreuve : épreuve sur dossier. Choix d'exercices sur un thème donné.

AVERTISSEMENT IMPORTANT

A partir de la session 2005, la forme de l'épreuve suivra la note parue dans le B.O. n°1 du 1er janvier 2004. Le contenu de cette note, ainsi que des commentaires et des informations émanant de la présidence du jury, peuvent être consultés sur le site du jury :

www.capes.math.jussieu.fr
(voir également l'en tête du rapport)

Cette épreuve se déroulait pour la dernière fois sous la forme correspondant à la note parue dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993, qui définit les épreuves du CAPES externe de mathématiques, et qui est détaillée comme suit.

Epreuve sur dossier 2004 :

L'épreuve sur dossier dure au maximum 45 minutes. Le temps est réparti de la façon suivante :

- Pendant 25 minutes au maximum le candidat expose son choix d'exercice (objectifs, illustration du thème,…), puis ;
- Pendant 20 minutes au minimum un entretien s'instaure, entre la commission et le candidat, au cours duquel le candidat sera amené à résoudre au moins un exercice choisi par la commission.

Les remarques concernant les TICE sont identiques à celles données pour la première épreuve orale (voir partie **5.5** ci-dessus). Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils peuvent emprunter à la bibliothèque du CAPES une calculatrice programmable scientifique et graphique. La liste des modèles proposés figure en partie **V.3** de ce rapport. Il y a cependant une différence importante entre les deux épreuves. L'injonction selon laquelle le dossier appelle une présentation à l'aide d'une calculatrice est *obligatoire* pour certains dossiers, dossiers dans lesquels figure, immédiatement après l'énoncé du thème, l'avertissement suivant :

" Pour au moins l'un de ces exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice ".

Cet avertissement figurait dans les dossiers suivants :
06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 21, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 65, 67, 68, 69, 72, 73, 74, 77, 79, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 89, 90, 91.
La non prise en compte de cet avertissement entraîne nécessairement une dévalorisation importante de la prestation du candidat.

Deux dossiers (62 et 63) comportaient une mention encore plus contraignante :

« Chacun des exercices proposé doit, pour sa résolution, faire appel à l'utilisation d'une calculatrice »

L'épreuve sur dossier se place au niveau de l'enseignement secondaire (cf. B.O. n°21 du 26 mai 1994). Il n'y a aucune extension de programme dans ce cas. Les candidats ont à choisir un sujet parmi deux proposés par le jury.
On rappelle que les "références aux programmes" ne constituent pas un plan de l'exposé, et que la "documentation conseillée" n'est pas exhaustive. Il ne s'agit dans les deux cas que d'une aide apportée aux candidats.

Les candidats ont deux heures pour préparer l'épreuve et peuvent utiliser les ouvrages imprimés disponibles dans le commerce, vierges de toute annotation manuscrite. Ils peuvent les apporter ou en emprunter à la bibliothèque du concours. Le jury peut s'opposer à l'utilisation de certains ouvrages s'il juge que cela risque de dénaturer l'épreuve (cf. B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993).
La "documentation conseillée" ne peut-être que très générale. La bibliothèque possède les manuels usuels en plusieurs exemplaires, mais la fourniture d'un ouvrage déterminé ne peut pas être garantie. Afin que tous les candidats puissent disposer d'un réel choix on limite leur emprunt à 5 ouvrages au plus.

5.6 Commentaires sur l'utilisation de la calculatrice

AVERTISSEMENT IMPORTANT

Pour le concours 2005, les matériels disponibles sont fortement modifiés, suite à la modification de la seconde épreuve orale. Deux modèles seulement seront présentés :

Texas Instruments : Voyage 200 ; Casio : Classpad 300

Il est nécessaire que les candidats soient préparés à utiliser l'une ou l'autre de ces deux machines.

Un certain nombre de sujets de première épreuve comportent une mention invitant les candidats à illustrer leur exposé par un ou des exemples nécessitant l'usage d'une calculatrice.
Un nombre important des dossiers de seconde épreuve comportent une mention de nature impérative (« pour l'un au moins des exercices proposés, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice »).

Une enquête a été menée pendant les épreuves orales de la session 2004, d'où ressortent les résultats approximatifs suivants :

-*pour la première épreuve (exposé) environ 15% des candidats ont utilisé une calculatrice.*
-*pour la seconde épreuve (dossier) environ 36% des candidats ont utilisé une calculatrice.*

En 2003, les pourcentages correspondants étaient respectivement 9% et 21%

Depuis la session 2001, les candidats ont la possibilité de projeter l'écran de la calculatrice qu'ils utilisent, comme ils le feraient devant une classe, par l'intermédiaire de tablettes.

-*pour la première épreuve (exposé) environ 12% des candidats ont utilisé ces dispositifs.*
-*pour la seconde épreuve (dossier) environ 28% des candidats ont utilisé ces dispositifs.*

En 2003, les pourcentages correspondants étaient respectivement 7% et 13%

L'évolution constatée cette année est significative, et témoigne des efforts fournis par le jury aussi bien que par les préparateurs et les candidats. Cette évolution vers la prise en compte plus importante des TICE dans le concours est rendue possible par la générosité des trois constructeurs présents Texas Instruments, Casio et Hewlett Packard, qui prêtent gracieusement du matériel en quantité suffisante.

L'appréciation par le jury de l'usage des calculatrices –avec ou sans rétroprojection – met en évidence que, si souvent cet usage n'apporte pas de valeur ajoutée à la prestation du candidat (il s'agit par exemple de l'usage de la calculatrice à de simples fins opératoires), les utilisations à but pédagogique pertinent, et les démonstrations brillantes, deviennent nettement plus nombreuses d'année en année. L'ensemble de ces pourcentages, pourcentages encore minoritaires, doit être apprécié en fonction du fait que de nombreux sujets n'appellent pas particulièrement une illustration au moyen des calculatrices, ce qui minore évidemment les résultats d'une telle enquête.

Certains candidats qui n'ont pas la maîtrise suffisante d'un modèle de calculatrice permettant une démonstration à but pédagogique indiquent qu'ils possèdent une certaine maîtrise de l'outil ordinateur ; ce peut notamment être le cas pour des étudiants ayant reçu une formation à un logiciel de calcul formel pendant leurs années initiales de formation post-baccalauréat. Les candidats et futurs candidats au CAPES externe de mathématiques doivent prendre en compte le fait que, pour le moment, l'aptitude à utiliser les TICE n'y est évaluée qu'à travers l'usage des calculatrices scientifiques, et que lors de la prochaine session, il y aura de grands changements dans le système de prêt : deux modèles seulement seront proposés (*voir infra*). Ces modèles contiennent tous deux les fonctions attendues dans les programmes : tableur et logiciel de géométrie ; ils contiennent aussi des fonctions de calcul formel.

Les conditions de rétroprojection restent spartiates, malgré l'aide du S.I.E.C. qui a obligeamment mis à notre disposition le nombre de projecteurs souhaités. En effet, les salles sont généralement dépourvues d'écrans déroulables et l'obturation de leurs fenêtres est très inégale. Néanmoins chaque commission a fait de son mieux pour installer les appareils de manière à pouvoir évaluer convenablement les prestations des candidats sur ce point, en faisant naturellement abstraction de la qualité technique de la projection.