# CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE D'ANALYSE
# CAPES EXTERNE DE MATHÉMATIQUES – 2006

Calixte Denizet[1]

22 avril 2006

1. Pour tout commentaire ou erreur de ma part, vous pouvez me contacter à Calixte.Denizet@ac-rennes.fr

# 2 Préliminaires.

## 2.1 Résultat 1.

1. Par définition de l'équivalence, nous avons

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n \Longleftrightarrow x_n - y_n = \mathrm{o}(x_n)$$

c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |x_n - y_n| \leqslant \varepsilon x_n$$

car $x_n \geqslant 0$.
On se fixe $\varepsilon > 0$. Soit donc $n \geqslant n_0$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n} y_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(x_k - y_k)\right| + \sum_{k=n_0}^{n} |x_k - v_k| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(x_k - y_k)\right| + \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n} x_k$$

2. Si la série de terme général $x_n$ est divergente, alors

$$\sum_{k=0}^{n_0-1}(x_k - y_k) = \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)$$

donc pour $n \geqslant n_1$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(x_k - y_k)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

Puis en reprenant, l'inégalité précédente, on en déduit que pour $n \geqslant \max(n_0,n_1)$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n} y_k\right| \leqslant 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n} x_k$$

ce qui signifie que :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} y_k$$

## 2.2 Résultat 2.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la suite $(v_{n,p})_{p\geqslant n+1}$ définie par :

$$\forall p \geqslant n+1, \quad v_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{p} u_k$$

La suite $\left(\sum_{k=0}^{p} u_k\right)_{p\geqslant n+1}$ étant convergente de limite $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, on en déduit que :

$$v_n = \lim_{p\to+\infty} v_{n,p} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

est bien définie. De plus, cette suite est convergente de limite nulle car

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = 0$$

b. On peut effectuer une transformation d'Abel en constatant que $v_{n-1} - v_n = u_n$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k u_k &= \sum_{k=1}^{n} k(v_{k-1} - v_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k v_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k v_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) v_k - \sum_{k=0}^{n} k v_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} [(k+1) - k] v_k - n v_n \\
\sum_{k=1}^{n} k u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} v_k - n v_n
\end{aligned}$$

c. Il suffit de montrer que la suite $(nv_n)$ est convergente de limite nulle.
On peut constater que $(v_n)$ est une suite à termes positifs (car les $u_n$ le sont) et décroissante (car $v_n - v_{n+1} = u_{n+1} > 0$).
La série de terme général étant convergente, elle vérifie alors le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall q > p \geqslant N, \quad \left| \sum_{n=p+1}^{q} v_n \right| \leqslant \varepsilon$$

Fixons donc $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ s'en déduisant. La suite $(v_n)$ étant positive, on peut écrire :

$$\forall q > p \geqslant N, \quad 0 \leqslant \sum_{n=p+1}^{q} v_n \leqslant \varepsilon$$

et $(v_n)$ étant décroissante, on a :

$$0 \leqslant (q - (p+1) + 1) v_q \leqslant \sum_{n=p+1}^{q} v_n \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow 0 \leqslant q v_q \leqslant \varepsilon + p v_q$$

Fixons $p = N$. La suite $(v_n)$ étant de limite nulle, on sait qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant v_n = |v_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{N}$ pour tout $n \geqslant N_1$.
On en déduit alors que pour tout $q \geqslant \max(N, N_1)$, on a

$$0 \leqslant q v_q \leqslant \varepsilon + N \frac{\varepsilon}{N} = 2\varepsilon.$$

On en conclut alors que la suite $(nv_n)$ est convergente de limite nulle.

d. On suppose que la série de terme général $nu_n$ est convergente. La suite $\left( \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} k u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors convergente de limite nulle et on a clairement :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (n+1) u_k = (n+1) v_n \geqslant 0$$

puis par encadrement nous en déduisons que la suite $((n+1)v_n)$ est de limite nulle et comme $(v_n)$ est de limite nulle, nous en déduisons que $(nv_n)$ est de limite nulle.

e. Nous venons de montrer dans les deux questions précédentes que les séries de termes généraux $nu_n$ et $v_n$ sont simultanément convergentes et dans ce cas la suite $(nv_n)$ est de limite nulle donc compte tenu de la relation montrée en *(1.b.)*, nous en déduisons immédiatement que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nu_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

2. On suppose que $X$ admet une espérance c'est à dire que :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n)$$

existe c'est à dire que la série de terme général $nP(X = n)$ est convergente.
Or la série de terme général $u_n = P(X = n)$ est une série à termes positifs et convergeant vers $1$. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) = P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} \{X = k\}\right)$$

la dernière égalité ayant lieu puisque les évènements $(X = k)_k$ sont disjoints et nous en déduisons que :

$$v_n = P(X \geqslant n + 1) = P(X > n)$$

puis en usant du résultat de la question *(1.e.)*, nous en déduisons que

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n).$$

## 2.3 Résultat 3.

1. La suite $(a_n)$ étant à termes positifs, il est évident que $f$ est croissante sur $[0,R[$, par conséquent $f$ admet une limite en $R$ et celle-ci vaut $\sup_{x\in[0,R[} f(x)$ et l'équivalence demandée devient alors évidente.

2. a. Soit $0 < \varepsilon \leqslant R$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(R-\varepsilon)^k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k(R-\varepsilon)^k = f(R-\varepsilon) \leqslant L$$

la première somme étant finie, on peut faire tendre $\varepsilon$ vers $0$ et on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k R^k \leqslant L.$$

b. La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k R^k\right)$ est croissante car les $a_k$ sont positifs et $R > 0$, et majorée par $L$, elle est donc convergente.

c. On a pour tout $x \in [-R,R]$ :

$$\sum a_k \left|x^k\right| \leqslant \sum a_k R^k$$

ce qui induit que la série entière est normalement convergente sur $[-R,R]$.
Ainsi la fonction $x \mapsto \sum a_n x^n$ est continue sur $[-R,R]$ donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to R^-} f(x).$$

## 3 Première modélisation : le cas particulier $N = 2$ .

1. a. Si le jeu s'arrête au second duel, il est alors clair que $J_0$ ou $J_1$ a gagné ses deux duels donc $D_2$ correspond à $(0,0)$ ou à $(1,1)$.

b. Le jeu s'arrêtant au $(n+1)$-ième duel, le $(n+1)$-uplet constitué des résultats ne peut contenir un entier $k$ (avec $0 \leqslant k < n$) plus d'une fois et il contient nécessairement $n$ deux fois. Ainsi $D_{n+1}$ correspond au $(n+1)$-uplet $(0,2,\ldots,n-2,n-1,n,n)$ ou bien à $(1,2,\ldots,n-2,n-1,n,n)$.

2. a. L'évènement « $J_0$ gagne ou $J_1$ gagne » étant certain, la probabilité que $D_n$ (pour $n \geqslant 3$) se produise est égale à la probabilité de l'évènement « $J_2$ gagne, $J_3$ gagne, …, $J_{n-1}$ gagne et $J_n$ perd », donc :

$$\forall n \geqslant 3, \quad P(D_n) = p^{n-2}(1-p)$$

et $P(D_2) = (1-p)(1-p_2) + p(1-p_2) = 1 - p_2 = 1 - p$ donc

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(D_n) = p^{n-2}(1-p).$$

De plus les évènements $D_n$ étant disjoints entre eux, on a :

$$P\left(\bigcup_{n\geqslant 2} D_n\right) = \sum_{n\geqslant 2} P(D_n) = \sum_{n\geqslant 2} p^{n-2}(1-p) = (1-p) \times \frac{1}{1-p} = 1$$

c'est à dire que l'évènement $\bigcup\limits_{n\geqslant 2} D_n$ est certain ce qui revient à dire que le jeu s'arrêtera au bout d'un nombre fini de duels.

b. La loi de $T$ est donnée par $P(T = n) = P(D_n) = (1-p)p^{n-2}$. Ainsi $T$ suit une loi géométrique de paramètre $1-p$, donc l'espérance et la variance existent et valent :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[T] &= (1-p)\sum_{n\geqslant 2} np^{n-2} = \frac{1-p}{p}\sum_{n\geqslant 2} np^{n-1} = \frac{1-p}{p} \times \left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) \\
&= \frac{1-p}{p}\frac{p(2-p)}{(1-p)^2} \\
\mathbf{E}[T] &= \frac{2-p}{1-p}.
\end{aligned}$$

De plus la variance est donnée par $\mathbf{Var}[T] = \mathbf{E}[T^2] - (\mathbf{E}[T])^2$, on commence par calculer $\mathbf{E}[T^2]$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[T^2] &= (1-p)\sum_{n\geqslant 2} n^2 p^{n-2} \\
&= (1-p)\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)p^{n-2} + (1-p)\sum_{n\geqslant 2} np^{n-2} \\
&= (1-p) \times \frac{2}{(1-p)^3} + \frac{2-p}{1-p}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[T] &= \frac{2 + (2-p)(1-p) - (2-p)^2}{(1-p)^2} \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}
\end{aligned}$$

3. Calculons $P(D_k)$ pour $k \geqslant 3$ :

$$P(D_k) = p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_{k-1}(1 - p_k) = \beta_{k-1}(1 - p_k) = \beta_{k-1} - \beta_k$$

et $P(D_2) = 1 - p_2$ donc pour $n \geqslant 3$ :

$$\sum_{k=2}^{n} P(D_k) = 1 - \beta_2 + \sum_{k=3}^{n} \beta_{k-1} - \beta_k = 1 - \beta_n$$

et cette formule est encore vraie pour $n = 2$, donc

$$\sum_{k=2}^{n} P(D_k) = 1 - \beta_n$$

De plus, les évènements $(D_n)$ étant disjoints deux à deux, on a :

$$P\left(\bigcup_{k=2}^{n} D_k\right) = \sum_{k=2}^{n} P(D_k) = 1 - \beta_n$$

donc $\displaystyle\bigcup_{k=2}^{\infty} D_k$ est de probabilité $1$ si et seulement si $\beta_n$ tend vers $0$ quand $n$ tend vers l'infini.

4. Pour que $\bigcup_{n\geqslant 2} D_n$ soit de probabilité $1$, il faut et il suffit que $\beta_n$ tende vers $0$. Or compte tenu que $p_n = 1 - \dfrac{1}{n^\alpha}$, nous avons :

$$\beta_n = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i^\alpha}\right)$$

et puisque chaque terme du produit est strictement positif, nous pouvons passer au logarithme pour obtenir :

$$\ln \beta_n = \sum_{i=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{i^\alpha}\right).$$

Puisque $\beta_n$ doit tendre vers $0$, la série de droite doit être divergente de limite $-\infty$, or le terme général de cette série est équivalent en l'infini à $-\dfrac{1}{i^\alpha}$. La série de terme général $-\dfrac{1}{i^\alpha}$ est divergente si et seulement si $\alpha \in ]0,1]$ (critère de Riemann) donc la série de terme général $\ln\left(1 - \dfrac{1}{i^\alpha}\right)$ est divergente si et seulement si $\alpha \in ]0,1]$ (*cf* préliminaires).
On peut donc conclure que $\beta_n$ tend vers $0$ quand $n$ tend vers l'infini si et seulement si $\alpha \in ]0,1]$.

5. On a $P(T = n) = P(D_n)$, donc :

$$P(T = 2) = 1 - p_2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 3, \quad P(T = n) = \beta_{n-1} - \beta_n$$

et on a par téléscopage

$$\beta_n = \prod_{i=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \prod_{i=2}^{n} \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}$$

et on en déduit que

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(T = n) = \frac{1}{n(n-1)}.$$

La série de terme général $nP(T = n)$ est clairement divergente, donc $T$ n'admet pas d'espérance.

6. a. Puisque

$$-\ln p_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^\alpha}$$

et que pour $\alpha \in ]0,1[$ la série de terme général $\dfrac{1}{k^\alpha}$ est divergente, on a, d'après les préliminaires,

$$\sum_{k=2}^{n} \ln p_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

b. La fonction $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ étant décroissante, on a par positivité de l'intégrale :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k^\alpha}\,dx \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{(k-1)^\alpha}\,dx$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \frac{1}{(k-1)^\alpha}.$$

En sommant les inégalités, on obtient grâce à la relation de Chasles que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{1}^{n} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^\alpha}$$

c'est à dire :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} + 1 - \frac{1}{n^\alpha}$$

donc

$$\frac{1}{1-\alpha} \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha} + 1 - \frac{1}{n^\alpha}$$

puis comme $\alpha \in ]0,1[$, on a :

$$\left| \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right| \leqslant \frac{1}{1-\alpha} + 1 - \frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}(n^{1-\alpha})$$

donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

c. De la question précédente, on peut déduire que

$$\ln \beta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

De plus :

$$\ln\left(n^c u_n\right) = \ln\left(n^c \beta_n (1-p_{n+1})\right) = \ln\left(\beta_n\right) + \ln \frac{n^c}{(n+1)^\alpha}$$

et on a :

$$\ln\left(n^c u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + (c-\alpha)\ln n$$

puis par théorème de comparaison des fonctions usuelles, on a

$$\ln\left(n^c u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

donc la suite $(\ln(n^c u_n))$ tend vers $-\infty$ quand $n$ tend vers l'infini.
En particulier, pour $c = 3$, la suite $(\ln(n^3 u_n))$ tend vers $-\infty$ donc par application de l'exponentielle qui est de limite nulle en $-\infty$, la suite $(n^3 u_n)$ tend vers $0$ donc $nu_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Par le théorème de comparaison des séries et le critère de Riemann, on en déduit que la série de terme général $nu_n$ est convergente.
On a $nP(T = n) = nu_{n-1} = (n-1)u_{n-1} + u_{n-1}$, puis comme $u_n \leqslant nu_n$ pour $n \geqslant 1$, on en déduit alors que la série de terme général $nP(T = n)$ est convergente donc $T$ admet une espérance.

# 4 Deuxième modélisation : le cas où les probabilités sont constantes.

## 4.1 Cas particulier : $N = 3$ et $p = 1/2$ .

1. En notant $P(A|B)$ la probabilité de $A$ sachant $B$, on a :

$$P(G_n|A_n) = \frac{P(G_n \cap A_n)}{P(A_n)} = \frac{P(G_n)}{P(A_n)}$$

car si $G_n$ se réalise, alors nécessairement $A_n$ se réalise. De plus, si $J_n$ participe, il a une chance sur deux de gagner chacune de ses trois confrontations donc

$$P(G_n|A_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

et on en déduit que :

$$P(G_n) = \frac{1}{8} P(A_n).$$

2. Puisque $N = 3$, il y a au moins trois confrontations. Les joueurs $J_0$ et $J_1$ participent à la première, $J_2$ à la seconde et $J_3$ à la troisième, donc les évènements $A_0$, $A_1$, $A_2$ et $A_3$ sont certains.
3. a. Le premier duel du joueur $J_{n-k}$ est le $(n-k)$-ième (si bien sûr le jeu ne s'est pas arrêté avant), s'il participe au $n$-ième duel, il aura alors participer à $k+1$ duels. Donc si $k > 2$, alors $k + 1 > 3$ donc $J_{n-k}$ a gagné trois duels et le $n$-ième duel ne peut avoir lieu donc $P(A_{n,k}) = 0$.
Les évènements $A_{n,1}$ et $A_{n,2}$ sont incompatibles et leur réunion vaut $A_n$ donc :

$$P(A_n) = P(A_{n,1}) + P(A_{n,2}).$$

De plus :

$$P(A_{n,1}|A_{n-1}) = \frac{P(A_{n,1} \cap A_{n-1})}{P(A_{n-1})} = \frac{P(A_{n,1})}{P(A_{n-1})}$$

car $A_{n,1} \subset A_{n-1}$. Or $P(A_{n,1}|A_{n-1}) = \dfrac{1}{2}$ donc $P(A_{n,1}) = \dfrac{1}{2} P(A_{n-1})$. On a $P(A_{n,2}|A_{n-2}) = \dfrac{1}{4}$ et $A_{n,2} \subset A_{n-2}$ donc, de même, $P(A_{n,2}) = \dfrac{1}{4} P(A_{n-2})$. On peut alors conclure que pour $n \geqslant 4$

$$P(A_n) = \frac{1}{2} P(A_{n-1}) + \frac{1}{4} P(A_{n-2}).$$

b. La suite $(u_n)$ définie pour $n \geqslant 2$ par

$$\begin{cases} u_2 = 1, u_3 = 1 \\ \forall n \geqslant 4, u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + \frac{1}{4} u_{n-2} \end{cases}$$

est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 donc $u_n$ est une combinaison linéaire de $r_1^n$ et de $r_2^n$ donc

$$\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \geqslant 2, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

On détermine $\lambda$ et $\mu$ grâce aux conditions initiales $u_2$ et $u_3$ :

$$\begin{cases} 1 = \lambda r_1^2 + \mu r_2^2 \\ 1 = \lambda r_1^3 + \mu r_2^3 \end{cases}$$

or le déterminant de ce système vaut $r_1^2 r_2^3 - r_1^3 r_2^2 = r_1^2 r_2^2 (r_2 - r_1)$ qui est différent de $0$ car $r_1 < r_2$. On a alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{r_1^2 r_2^2 (r_2 - r_1)} \begin{pmatrix} r_2^3 & -r_2^2 \\ -r_1^3 & r_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{r_2 - 1}{r_1^2 (r_2 - r_1)} \\ \dfrac{1 - r_1}{r_2^2 (r_2 - r_1)} \end{pmatrix}$$

On calcule $\lambda$ et $\mu$ :

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= \frac{r_2^3 - r_2^2 + r_1^2 - r_1^3}{r_1^2 r_2^2 (r_2 - r_1)} \\ &= \frac{r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2 - (r_1 + r_2)}{(r_1 r_2)^2} \\ &= \frac{(r_1 + r_2)^2 - r_1 r_2 - (r_1 + r_2)}{(r_1 r_2)^2} \end{aligned}$$

or $r_1 + r_2 = \dfrac{1}{2}$ et $r_1 r_2 = -\dfrac{1}{4}$ donc $\lambda + \mu = 0$ et

$$\begin{aligned} \lambda\mu &= \frac{r_2 - 1 - r_1 r_2 + r_1}{r_1^2 r_2^2 (r_2 - r_1)^2} \\ &= \frac{r_1 + r_2 - r_1 r_2 - 1}{(r_1 r_2)^2 [(r_1 + r_2)^2 - 4 r_1 r_2]} \\ &= \frac{-1/4}{5/64} \\ &= -\frac{16}{5} \end{aligned}$$

et de $\lambda + \mu = 0$ on déduit que $\lambda = \pm \dfrac{4}{\sqrt{5}}$. Or $r_1 r_2 = -\dfrac{1}{4} < 0$ et $r_1 < r_2$ donc $r_1 < 0$ donc $\mu > 0$ et on peut en conclure que :

$$\lambda = -\frac{4}{\sqrt{5}} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

puis que

$$P(A_n) = \frac{4}{\sqrt{5}} \left( r_2^n - r_1^n \right)$$

c. Les évènements $(G_n)$ sont deux à deux disjoints donc :

$$P\left( \bigcup_{n \geqslant 0} G_n \right) = \sum_{n \geqslant 0} P(G_n) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \sum_{n \geqslant 2} r_2^n - r_1^n$$

il n'est pas difficile de vérifier que $|r_1| < 1$ et que $|r_2| < 1$ donc :

$$\begin{aligned} P\left( \bigcup_{n \geqslant 0} G_n \right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \left( \frac{r_2^2}{1 - r_2} - \frac{r_1^2}{1 - r_1} \right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{r_2^2 - r_1^2 - r_1 r_2 (r_2 - r_1)}{1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{(r_2 - r_1)(r_1 + r_2 - r_1 r_2)}{1 - (r_1 + r_2) + r_1 r_2} \end{aligned}$$

or $r_2 - r_1 = \sqrt{(r_1+r_2)^2 - 4r_1r_2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (car $r_2 > r_1$) donc

$$P\left(\bigcup_{n\geqslant 0} G_n\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{3/4}{1/4} = 1$$

donc l'évènement « il existe un gagnant » est certain donc la probabilité que le jeu s'arrête est de 1.
Pour que le jeu s'arrête au troisième duel, il faut et il suffit que $J_0$ ou $J_1$ gagne ses trois duels donc :

$$P(T=3) = P(G_0 \cup G_1) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Si le jeu s'arrête au $n$-ième duel, alors $J_n$ ne peut être la vainqueur (car il n'a fait qu'un seul duel), $J_{n-1}$ non plus (il n'a fait que deux duels) et comme $P(A_{n,k}) = 0$ pour $k > 2$, on en déduit que $J_{n-2}$ est vainqueur, autrement dit

$$P(T=n) = P(G_{n-2}).$$

Donc pour $n \geqslant 4$, on a :

$$P(T=n) = \frac{1}{8}P(G_{n-2}) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(r_2^{n-2} - r_1^{n-2}\right)$$

L'espérance de $T$ existe car la série de terme général $nP(T=n)$ est clairement convergente, donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[T] &= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\sum_{n\geqslant 4} n\left(r_2^{n-2} - r_1^{n-2}\right)\\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{r_2}\sum_{n\geqslant 4} nr_2^{n-1} - \frac{1}{r_1}\sum_{n\geqslant 4} nr_1^{n-1}\right)\\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{(1-r_2)^2} - 1 - 2r_2 - 3r_2^2\right) - \frac{1}{r_1}\left(\frac{1}{(1-r_1)^2} - 1 - 2r_1 - 3r_1^2\right)\right]\\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{1}{r_2(1-r_2)^2} - \frac{1}{r_1(1-r_1)^2} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + 3(r_1 - r_2)\right]\\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{r_1(1-r_1)^2 - r_2(1-r_2)^2}{r_1r_2((1-r_1)(1-r_2))^2} + \frac{r_2 - r_1}{r_1r_2} - 3(r_2 - r_1)\right]\\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{r_1^3 - r_2^3 - 2(r_1^2 - r_2^2) + r_1 - r_2}{r_1r_2(1 + r_1r_2 - (r_1+r_2))^2} - 2\sqrt{5} - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right]\\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{(r_1 - r_2)(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 - 2(r_1+r_2) + 1)}{r_1r_2(1 + r_1r_2 - (r_1+r_2))^2} - \frac{7\sqrt{5}}{2}\right]\\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\frac{(r_1 - r_2)((1 - (r_1+r_2))^2 - r_1r_2)}{r_1r_2(1 + r_1r_2 - (r_1+r_2))^2} - \frac{7\sqrt{5}}{2}\right]\\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{-\sqrt{5}/4}{-1/64} - \frac{7\sqrt{5}}{2}\right)\\
\mathbf{E}[T] &= \frac{56}{8} = 7
\end{aligned}$$

### 4.2 Étude du cas général

1. a. La probabilité que $J_0$ gagne le premier duel est $1-p$ et la probabilité qu'il gagne chacun des $N-1$ duels suivants est $1-p$ donc :

$$g_0 = P(G_0) = (1-p)^N.$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant N$, les évènements $A_k$ sont certains car il faut au minimum $N$ duels pour que $N$ duels soient gagnés par l'un des joueurs, donc :

$$\forall k \in [0,N]_{\mathbb{N}}, \quad a_k = P(A_k) = 1.$$

b. Les évènements $G_n$ sont deux à deux disjoints donc :

$$\sum_{k=0}^{n} g_k = \sum_{k=0}^{n} P(G_k) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n} G_k\right) \leqslant 1$$

ainsi la série de terme général $g_n$ est à termes positifs (ces sont des probabilités) et les sommes partielles sont majorées donc la série est convergente.

c. On a $P(G_n|A_n) = \dfrac{P(G_n)}{P(A_n)} = \dfrac{g_n}{a_n}$ car $G_n \subset A_n$. Le joueur $J_n$ a participé au $n$-ième duel avec une probabilité $p$ de gagner et les $N-1$ duels suivants avec une probabilité $1-p$ de gagner donc :

$$P(G_n|A_n) = p(1-p)^{N-1} \iff g_n = p(1-p)^{N-1} a_n.$$

Ainsi $a_n = \dfrac{g_n}{p(1-p)^{N-1}}$ donc la série de terme général $a_n$ est convergente.

2. a. Tout d'abord, on a $P(A_{n,k}) = 0$ pour $k \geqslant N$, en effet si $J_n$ rencontre $J_{n-k}$ avec $k \geqslant N$ alors le joueur $J_{n-k}$ aura remporté au moins $N$ duels ainsi le $n$-ième ne pourra avoir lieu. Les évènements $A_{n,k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion vaut $A_n$ donc :

$$a_n = \sum_{k=1}^{N-1} P(A_{n,k})$$

De plus, compte tenu de $A_{n,k} \subset A_{n-k}$, on a :

$$P(A_{n,k}|A_{n-k}) = \frac{P(A_{n,k})}{a_{n-k}}$$

Le joueur $J_{n-k}$ a une probabilité $p$ de remporter le $n-k$-ième duel et une probabilité $1-p$ de remporter les $(n-1)-(n-k)$ suivants donc :

$$P(A_{n,k}|A_{n-k}) = p(1-p)^{k-1}$$

et on peut conclure que :

$$a_n = \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1} a_{n-k}.$$

Pour $n = N+1$, on a :

$$a_{N+1} = \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1} a_{N-(k-1)} = p \sum_{k=0}^{N-2} (1-p)^k a_{N-k}$$

or nous avons vu que $a_k = 1$ pour $k \in [0,N]_{\mathbb{N}}$ donc :

$$a_{N+1} = p\frac{1-(1-p)^{N-1}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^{N-1}$$

b. On a

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n\geqslant N+1} \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1} a_{n-k} \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1} \sum_{n\geqslant N+1} a_{n-k} \\
&= \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1} \sum_{n\geqslant N+1-k} a_n \\
S &= \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1} \left(S - \sum_{n=1}^{N-k} a_n\right)
\end{aligned}$$

les deux sommes de la première ligne pouvant être permutées compte tenu que la seconde est finie. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}\right) S &= \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1} \sum_{n=1}^{N-k} a_n \\
\left(1 - p\frac{1-(1-p)^{N-1}}{1-(1-p)}\right) S &= \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1} \sum_{i=k}^{N-1} a_{N-i} \\
(1-p)^{N-1} S &= \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=k}^{N-1} p(1-p)^{k-1} a_{N-i}.
\end{aligned}$$

En permutant les deux sommes, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1-p)^{N-1} S &= \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{i=1}^{N-1} a_{N-i} \sum_{k=1}^{i} p(1-p)^{k-1} \\
&= N - \sum_{i=1}^{N-1} a_{N-i} \cdot p \frac{1-(1-p)^i}{1-(1-p)} \\
&= N - \sum_{i=1}^{N-1} a_{N-i} \left(1-(1-p)^i\right) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{N-1} (1-p)^i a_{N+1-(i+1)} \\
&= 1 + \frac{1}{p} \sum_{k=2}^{N} p(1-p)^{k-1} a_{N+1-k} \\
&= 1 + \frac{1}{p} \left[a_{N+1} - p a_N + p(1-p)^{N-1} a_1\right] \\
&= 1 + \frac{(1-p)\left[1-(1-p)^{N-1}\right]}{p}
\end{aligned}$$

et on en déduit que :

$$S = \frac{p + (1-p)\left[1-(1-p)^{N-1}\right]}{p(1-p)^{N-1}} = \frac{1-(1-p)^N}{p(1-p)^{N-1}}$$

puis que :

$$\sum_{n\geqslant 0} g_n = (1-p)^N + p(1-p)^{N-1}S = 1$$

donc l'évènement $\bigcup_{n\geqslant 0} G_n$ est certain donc la probabilité que le jeu s'arrête est 1.

3. a. Si le jeu s'arrête à la $n$-ième étape cela signifie le joueur $J_{n-N+1}$ a gagné ses $N$ duels donc :

$$g_n = P(T = n + N - 1)$$

Si $J_n$ entre en jeu, alors le jeu ne peut s'arrêter qu'en au moins $n$ duels et réciproquement. Donc :

$$a_n = P(T \geqslant n).$$

b. On a $P(T > n) = P(T \geqslant n+1) = a_{n+1}$. Puisque la série de terme général $a_n$ est convergente alors celle de terme général $a_{n+1}$ l'est aussi donc $T$ admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[T] &= \sum_{n>0} P(T>n) = \sum_{n\geqslant 0} a_{n+1} = S \\
\mathbf{E}[T] &= \frac{1-(1-p)^N}{p(1-p)^{N-1}}.
\end{aligned}$$

Le résultat trouvé en *(4.1.3.c.)* était valable pour $N = 3$ et $p = \dfrac{1}{2}$, calculons $\mathbf{E}[T]$ dans ce cas :

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1-(1-\frac{1}{2})^3}{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{8}} = 7$$

ce qui confirme le résultat de la question *(4.1.3.c.)*.
Puis pour $N = 2$, on a :

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1-(1-p)^2}{p(1-p)} = \frac{p(2-p)}{p(1-p)} = \frac{2-p}{1-p}$$

ce qui confirme là-aussi le résultat de la question *(3.2.b.)*.
Et enfin, avec $p = \dfrac{1}{2}$ et $N$ quelconque, on a :

$$\mathbf{E}[T] = \frac{1-(1-\frac{1}{2})^N}{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})^{N-1}} = \frac{\frac{2^N-1}{2^N}}{\frac{1}{2^N}} = 2^N - 1.$$

c. On a $(A_n \cap \overline{A_{n+1}}) = (T = n)$ car si $J_n$ joue et si $J_{n+1}$ ne joue pas alors le jeu s'arrête à la $n$-ième étape et réciproquement. Donc

$$P(A_n) - P(A_{n+1}) = P(T = n) \Longleftrightarrow a_n - a_{n+1} = g_{n-N+1} = p(1-p)^{N-1}a_{n-N+1}$$

la dernière égalité étant vraie car $n - N + 1 \geqslant 2$.

# 5 Comportement asymptotique de la loi de $T$ .

## 5.1 Un lemme.

Il s'agit ici de démontrer le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$. On procède par récurrence sur $r \geqslant 2$ :

- **amorce :** Supposons que l'on ait $(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^{*2}$ tel que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

En faisant la confusion vecteur-affixe, on élève au carré et l'on obtient :

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \iff z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|$$

où $. \cdot .$ désigne le produit scalaire usuel. On se retrouve alors avec le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et cela permet d'affirmer que les vecteurs (affixes) sont liés c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_2 = \lambda z_1$ et puisque $z_1 \cdot z_2 > 0$ on $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi la propriété pour $r = 2$ est vraie.

- **hérédité :** Supposons la propriété vraie au rang $r-1$. Montrons-la au rang $r$.
  Soit une famille $(z_1, \ldots, z_r)$ une famille de $r$ nombres complexes non nuls telle que :

$$\left|\sum_{k=1}^{r} z_k\right| = \sum_{k=1}^{r} |z_k| \iff \left|z_r + \sum_{k=1}^{r-1} z_k\right| = |z_r| + \sum_{k=1}^{r-1} |z_k|$$

puis en appliquant l'inégalité triangulaire au membre de gauche, on obtient :

$$|z_r| + \sum_{k=1}^{r-1} |z_k| = \left|z_r + \sum_{k=1}^{r-1} z_k\right| \leqslant |z_r| + \left|\sum_{k=1}^{r-1} z_k\right| \iff \sum_{k=1}^{r-1} |z_k| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{r-1} z_k\right|$$

puis de nouveau par inégalité triangulaire, on a :

$$\sum_{k=1}^{r-1} |z_k| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{r-1} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{r-1} |z_k|$$

donc

$$\left|\sum_{k=1}^{r-1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{r-1} |z_k|.$$

D'après l'hypothèse de réccurence :

$$\forall k \in [\![2,r-1]\!], \quad \exists \lambda_k \in \mathbb{R}^{+*}, \quad z_k = \lambda_k z_1.$$

Autrement dit :

$$\left|z_r + \left(1 + \sum_{k=2}^{r-1} \lambda_k\right) z_1\right| = |z_r| + \left(1 + \sum_{k=2}^{r-1} \lambda_k\right) |z_1|$$

Posons $\mathbb{R}^{+*} \ni \lambda = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{r-1} \lambda_k$ et on a :

$$|z_r + \lambda z_1| = |z_r| + |\lambda z_1|.$$

D'après l'amorce, il existe $\lambda'_r \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $z_r = \lambda'_r \lambda z_1$ et en posant $\lambda_r = \lambda'_r \lambda$ la propriété est vraie au rang $r$.

### 5.2 Étude d'une fonction associée à $T$ .

1. On a, d'après *(4.2.3.a.)* :

$$Q(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_{n+1} x^n$$

Puisque la suite $(a_n)$ est à termes positifs et que la série de terme général $a_n$ est convergente, on en déduit que la série entière définie ci-dessus est de rayon $R \geqslant 1$. Si $R > 1$ alors $Q$ est clairement définie sur $[-1,1]$, elle y est évidemment continue et dérivable (car c'est une série entière). Par contre si $R = 1$, la série définissant $Q$ est majorée sur $[0,1[$ par $S$, donc d'après la question *(2.3.2.c.)* celle-ci est normalement convergente sur $[-1,1]$. De la convergence normale de la série entière, on déduit immédiatement que $Q$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

2. On a montré que :

$$\forall n \geqslant N+1, \quad a_{n+1} = a_n - p(1-p)^{N-1} a_{n-N+1}$$

donc

$$\begin{aligned}
Q(x) &= \sum_{n=0}^{N} a_{n+1}x^n + \sum_{n\geqslant N+1} a_n x^n - p(1-p)^{N-1} \sum_{n\geqslant N+1} a_{n-N+1}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_{n+1}x^n + x \sum_{n\geqslant N} a_{n+1}x^n - p(1-p)^{N-1}x^N \sum_{n\geqslant 1} a_{n+1}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{N} a_{n+1}x^n + x \left[Q(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1}x^n\right] - p(1-p)^{N-1}x^N \left[Q(x) - a_1\right] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x^n + a_{N+1}x^N + xQ(x) - x\sum_{n=0}^{N-1} x^n - p(1-p)^{N-1}x^N Q(x) + p(1-p)^{N-1}x^N \\
&= 1 - x^N + \left[1-(1-p)^{N-1}\right] x^N + p(1-p)^{N-1}x^N + xQ(x) - p(1-p)^{N-1}x^N Q(x)
\end{aligned}$$

et en passant les termes en $Q(x)$ à gauche, on obtient :

$$\left[1 - x + p(1-p)^{N-1}x^N\right] Q(x) = 1 - (1-p)^N x^N \iff \left[1 - x + \frac{p}{1-p}(x(1-p))^N\right] Q(x) = 1 - (x(1-p))^N$$

3. Posons

$$\alpha(x) = 1 - x + \frac{p}{1-p}(x(1-p))^N \qquad \text{et} \qquad \beta(x) = 1 - (x(1-p))^N$$

on a alors :

$$\alpha(x) = 1 - x + \frac{p}{1-p}[1-\beta(x)] \iff \alpha(x) + \frac{p}{1-p}\beta(x) = \frac{1}{1-p} - x$$

donc si $\rho$ est une racine commune à $\alpha$ et à $\beta$, alors $\rho$ est racine de $\dfrac{1}{1-p} - x$ donc $\rho = \dfrac{1}{1-p}$ puis on vérifie sans peine que $\alpha(\rho) = \beta(\rho) = 0$. Ainsi $\dfrac{1}{1-p}$ est la seule racine (évidemment réelle) commune à $\alpha$ et à $\beta$.
De plus, on vérifie que :

$$\beta'(\rho) = -N(1-p) \neq 0$$

donc $\rho$ est une racine réelle commune à $\alpha$ et $\beta$, et celle-ci n'est pas simultanément multiple (j'utilise cette expression car il y a une ambiguité sur le mot « *simple* » dans l'énoncé).
Les polynômes $\alpha$ et $\beta$ sont alors tous deux divisibles par le polynôme $1 - x(1-p)$ et on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\beta(x)}{1-x(1-p)} &= \frac{1-(x(1-p))^N}{1-x(1-p)} = \sum_{k=0}^{N-1} (1-p)^k x^k \\
&= 1 + \frac{1-p}{p}\sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}x^k \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1-p}{p}B(x)
\end{aligned}$$

puis compte tenu de la relation montrée à la question précédente, on a

$$\frac{\alpha(x)}{1-x(1-p)} = -\frac{p}{1-p}\frac{\beta(x)}{1-x(1-p)} + \frac{1}{1-p} = -B(x)$$

et en divisant l'égalité obtenue à la question *(5.2.2.)*, on obtient :

$$-B(x)Q(x) = \frac{1}{p} + \frac{1-p}{p}B(x) \iff Q(x) = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{pB(x)}.$$

### 5.3 Étude des racines de $B$ .

1. La fonction $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto B(x)+1$ est une somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$ donc celle-ci est strictement croissante puis on en déduit que $B$ est strictement croissante.
On a :
$$B(1) = -1 + p\sum_{k=1}^{N-1}(1-p)^{k-1} = -1 + p\frac{1-(1-p)^{N-1}}{1-(1-p)} = -(1-p)^{N-1}.$$
Ainsi $B(1) < 0$ et clairement $\lim\limits_{x\to+\infty} B(x) = +\infty$ donc grâce à la continuité et à la stricte monotonie de $B$ on peut appliquer le théorème de la bijection pour en déduire que $B$ admet une unique racine $\rho_N$ sur $]1,+\infty[$.
De plus, $B'(x) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} kp(1-p)^{k-1}x^{k-1}$ donc comme précédemment $B'$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $B'(\rho_N) > B'(0) = p$ donc $B'(\rho_N) \neq 0$. On peut alors conclure que $\rho_N$ est une racine simple de $B$.
2. On raisonne par l'absurde en supposant que toutes les racines complexes de $B$ sont de module au plus $\rho_N$. Soit $\omega$ une racine de $B$, on a :
$$1 = B(\omega) \Rightarrow 1 = \left|\sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}\omega^k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}|\omega|^k \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}\rho_N^k = 1$$
les inégalités précédentes deviennent alors des égalités et on en déduit que :
$$\left|\sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}\omega^k\right| = \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}|\omega|^k$$
et d'après le lemme, on a :
$$\forall k \in [\![2,N-1]\!],\ \exists\lambda_k \in ]0,+\infty[,\quad (1-p)^{k-1}\omega^k = \lambda_k\omega$$
donc si un tel $\omega$ existe, alors pour $k=2$ on en déduit qu'il est réel et comme $B$ n'admet qu'une seule racine réelle, on en déduit que $\omega = \rho_N$. Puisque $B$ est de degré $N-1$, on en déduit alors que $\rho_N$ est racine d'ordre $N-1$ (car dans $\mathbb{C}$, $B$ admet $N-1$ racines) ce qui est contradictoire.
On peut alors conclure que toutes les racines complexes de $B$ (hormis $\rho_N$) sont de module strictement supérieur à $\rho_N$.
3. La série entière complexe $\sum P(T > n)z^n$ est de rayon au moins 1 car la série $\sum a_{n+1}$ est convergente donc la convergence de la série entière est au moins assurée sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1. Puisque la série converge sur $[-1,1]$, on peut alors obtenir la convergence normale sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 ce qui assure la continuité de $\sum P(T > n)z^n$ sur $\overline{D(0,1)}$. Par compacité de $\overline{D(0,1)}$, la série $\sum P(T > n)z^n$ est alors bornée sur $\overline{D(0,1)}$ ce qui permet de conclure qu'elle n'admet pas de pôles sur $\overline{D(0,1)}$ (car au voisinage de ceux-ci, la série ne serait pas bornée). Par conséquent, le résultat était prévisible.

### 5.4 Recherche d'équivalent.

1. $B$ étant un polynôme $\dfrac{1}{B}$ est une fraction rationnelle donc $\dfrac{1}{B} \in \mathbb{C}(z)$ et le résultat demandé est une simple conséquence du théorème de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.
2. a. Afin d'éviter l'utilisation de la théorie des fonctions holomorphes, introduisons la fonction :
$$f_\theta : r \in ]-1,1[ \mapsto \frac{1}{1-re^{i\theta}}$$
qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. De plus, on a clairement
$$f_\theta(r) = \sum_{n\geqslant 0} r^n e^{in\theta}$$

et la série est de rayon $1$. En dérivant $s$ fois cette relation, nous obtenons :

$$f_\theta^{(s)}(r) = \sum_{n\geqslant s} n(n-1)\cdots(n-s+1)r^{n-s}e^{in\theta}$$

puis en reprenant l'expression initiale de $f_\theta$, on a :

$$f_\theta^{(s)}(r) = \frac{s!e^{is\theta}}{(1-re^{i\theta})^{s+1}}$$

donc

$$\frac{1}{(1-re^{i\theta})^{s+1}} = \sum_{n\geqslant s} \frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{s!} r^{n-s}e^{i(n-s)\theta}$$

et en réindiçant, on obtient :

$$\frac{1}{(1-re^{i\theta})^{s+1}} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+s)(n+s-1)\cdots(n+1)}{s!} r^{n}e^{in\theta} = \sum_{n\geqslant 0} \mathsf{C}_{n+s}^{s}\, r^n e^{in\theta}$$

ainsi

$$\forall s \geqslant 1, \forall |z| < 1, \quad \frac{1}{(1-z)^s} = \sum_{n\geqslant 0} \mathsf{C}_{n+s-1}^{s-1}\, z^n.$$

Puisque $|z_k| > 1$ et $|z| < 1$, on a $\left|\dfrac{z}{z_k}\right| < 1$ donc d'après la formule ci-dessus, on a :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{z}{z_k}\right)^s} = \sum_{n\geqslant 0} \mathsf{C}_{n+s-1}^{s-1} \left(\frac{z}{z_k}\right)^n$$

donc

$$\frac{1}{(z_k-z)^s} = \sum_{n\geqslant 0} \mathsf{C}_{n+s-1}^{s-1}\, \frac{z^n}{z_k^{n+s}}.$$

b. On a

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{v_k} \frac{\lambda_{k,s}}{(z-z_k)^s} &= \sum_{s=1}^{v_k} \lambda_{k,s} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathsf{C}_{n+s-1}^{s-1}}{z_k^{n+s}} z^n \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \left( \sum_{s=1}^{v_k} \frac{\lambda_{k,s}\mathsf{C}_{n+s-1}^{s-1}}{z_k^s} \right) \frac{1}{z_k^n}\frac{1}{z}\end{aligned}$$

les deux sommes ayant été permutées car la première est finie. On pose

$$P_k(X) = \sum_{s=1}^{v_k} \frac{\lambda_{k,s}(X+s-1)(X+s-2)\cdots(X+1)}{(s-1)!z_k^s}$$

qui est clairement dans $\mathbb{R}[X]$. De plus le polynôme $(X+s-1)(X+s-2)\cdots(X+1)$ est de degré $s-1$ donc $P_k$ est de degré au plus $v_k - 1$ et on a

$$P_k(n) = \sum_{s=1}^{v_k} \frac{\lambda_{k,s}\mathsf{C}_{n+s-1}^{s-1}}{z_k^s}$$

par conséquent

$$\sum_{s=1}^{v_k} \frac{\lambda_{k,s}}{(z-z_k)^s} = \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{P_k(n)}{z_k^n}\right) z^n.$$

c. On déduit de la question précédente que :

$$\frac{1}{B(z)} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{P_k(n)}{z_k^n}\right)z^n$$

donc

$$Q(x) = 1 - \frac{1}{p} - \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{P_k(n)}{pz_k^n}\right)x^n$$

puis par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients et on a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{m}\frac{P_k(n)}{z_k^n}.$$

3. a. Si $z_k \neq \rho_N$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\rho_N}{z_k}\right)^n P_k(n) = 0$$

car $\left|\frac{\rho_N}{z_k}\right| < 1$ et parce que $P_k$ est un polynôme. La somme donnant $a_{n+1}$ étant finie, on en déduit que si $\rho_N = z_\ell$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}\rho_N^n = \frac{1}{p}\lim_{n\to+\infty} P_\ell(n)$$

mais $\rho_N$ étant une racine simple $v_\ell = 1$ donc $P_\ell$ est de degré au plus $0$ donc $P_\ell$ est constant et :

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}\rho_N^n = \frac{P_\ell(0)}{p}$$

et en posant $K = \dfrac{P_\ell(0)}{p}$, on a

$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{\rho_N^n}.$$

b. On a, puisque $\rho_N$ est simple,

$$P_\ell = \frac{\lambda_{\ell,1}}{\rho_N} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{\ell,1} = \left.\frac{z-\rho_N}{B(z)}\right|_{z=\rho_N}.$$

et la dernière quantité vaut $\dfrac{1}{B'(\rho_N)}$ (en utilisant la règle de L'Hospital), on en déduit alors que :

$$K = \frac{1}{pB'(\rho_N)}.$$

On a $P(T=n) = g_{n-N+1} = p(1-p)^{N-1}a_{n-N+1}$ donc :

$$P(T=n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(1-p)^{N-1}\rho_N^N}{B'(\rho_N)}\frac{1}{\rho_N^n}.$$