Capes Externe 2004

Corrigé de l'épreuve 1
avec remarques et compléments

Jean-Etienne Rombaldi[1]

12 avril 2004

[1]Professeur agrégé à l'Université d'Aix-Marseille III

Table des matières

1 Corrigé du problème

– A – Quelques résultats fondamentaux

A.I. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel $x > 0$, on désigne par P_n la fonction polynomiale (donc indéfiniment dérivable) définie par :

$$P_n(x) = x^n - nx + n - 1 = x^n - 1 - n(x-1).$$

On a $P_n(1) = 0$ pour tout $n \geq 2$ et il s'agit de montrer que $P_n(x) > 0$ pour tout $x \in D = \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\}$.

$1^{ère}$ **solution** Avec $P_2(x) = (x-1)^2 > 0$ et :

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x-1)(x^n - 1) = P_n(x) + (x-1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} x^k > P_n(x)$$

pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in D$, le résultat se déduit par récurrence sur $n \geq 2$.

$2^{ème}$ **solution** Pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in]0,1[$ [resp. $x \in]1,+\infty[$], on a $P_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$ [resp. $P_n'(x) > 0$], donc P_n est strictement décroissante sur $]0,1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$ avec $P_n(1) = 0$, ce qui implique $P_n(x) > 0$ pour tout $x \in D$.

$3^{ème}$ **solution** On peut aussi écrire que pour tout $x \in D$ on a :

$$P_n(x) = x^n - 1 - n(x-1) = (x-1)\sum_{k=0}^{n-1}\left(x^k - 1\right) = (x-1)^2\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} x^j\right) > 0.$$

A.II. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$, on pose :

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,\ G_n(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Pour $n = 1$, on a $A_1(x) = G_1(x) = x_1$ pour tout $x_1 > 0$.
On suppose donc dans ce qui suit que $n \geq 2$.
En notant :

$$\Delta_n = \left\{x \in \left(\mathbb{R}^{+,*}\right)^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n\right\},$$

on a $A_n(x) = G_n(x)$ pour tout $x \in \Delta_n$. Il s'agit alors de montrer que :

$$\forall x \in D_n = \left(\mathbb{R}^{+,*}\right)^n \setminus \Delta_n,\ A_n(x) > G_n(x).$$

En remarquant que les fonctions A_n et G_n sont homogènes (i. e. $A_n(\lambda x) = \lambda A_n(x)$ et $G_n(\lambda x) = \lambda G_n(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in D_n$), il suffit de montrer cette inégalité sur :

$$E_n = \left\{x \in D_n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k = 1\right\}.$$

En effet pour tout $x \in D_n$, on a $\lambda = \sum_{k=1}^{n} x_k > 0$ et $x' = \frac{1}{\lambda}x \in E_n$, de sorte que :

$$A_n(x) = \lambda A_n(x') > \lambda G_n(x') = G_n(x)$$

si l'inégalité est vraie sur E_n.
Il s'agit donc de démontrer que :

$$\forall n \geq 2,\ \forall x \in E_n,\ nG_n(x) < 1.$$

1. Pour $(x_1, x_2) \in E_2$, on a :

$$1 - 2G_2(x) = 1 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)^2 > 0.$$

2.

2.1. On a déjà $\mathbb{A} \subset \mathbb{N}^*$.
Par récurrence descendante, on déduit de la propriété (iii) que si $m \geq 2$ est dans $\mathbb{A}$, alors $\{1, 2, \ldots, m\} \subset \mathbb{A}$ (on a $\{m\} \subset \mathbb{A}$ et en supposant que $\{k, \ldots, m\} \subset \mathbb{A}$ pour un entier k compris entre 2 et m, la propriété (iii) nous dit que $k - 1 \in \mathbb{A}$).
Toujours par récurrence, on déduit de (i) et (ii) que 2^n est dans $\mathbb{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (c'est vrai pour $n = 0$ d'après (i) et en le supposant vrai pour n, on a $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \in \mathbb{A}$ d'après (ii)).
Comme pour tout entier $m \geq 1$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq 2^n$, il en résulte que $m \in \mathbb{A}$.
On a donc bien $\mathbb{A} = \mathbb{N}^*$.

2.2. Posons :

$$\mathbb{A} = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n = 1 \text{ ou } n \geq 2 \text{ et } \forall x \in E_n,\ nG_n(x) < 1\}.$$

Pour tout n dans $\mathbb{A}$ on a $A_n(x) \geq G_n(x)$ pour tout $x \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, x est dans Δ_n (et donc $n \geq 2$).
On a $1 \in \mathbb{A}$ par définition et on a vu en **A.II.1.** que $2 \in \mathbb{A}$. Soit $n \in \mathbb{A}$ et $x = (x_k)_{1 \leq k \leq 2n}$ dans E_{2n}. Le vecteur x a au moins deux composantes distinctes, donc, quitte à réordonner (ce qui ne modifie ni A_{2n} ni G_{2n}), on peut supposer que $x_1 \neq x_2$. Si $n = 1$, on sait déjà que 2 est dans $\mathbb{A}$. On suppose donc que $n \geq 2$. On a :

$$2nG_{2n}(x) = 2n\sqrt{\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}} \leq n\left(\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

avec $n\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} < \sum_{k=1}^{n} x_k$ (puisque $x \notin \Delta_n$) et $n\left(\prod_{k=1}^{n} x_{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_{k=1}^{n} x_{n+k}$, ce qui donne :

$$2nG_{2n}(x) < \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_{n+k} = 1.$$

On a donc $2n \in \mathbb{A}$ si $n \in \mathbb{A}$.
Supposons que $n + 1 \in \mathbb{A}$ et soit $x \in E_n$. On a $\left(x, \frac{1}{n}\right) \notin \Delta_{n+1}$ et :

$$G_{n+1}\left(x, \frac{1}{n}\right) < A_{n+1}\left(x, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

soit :

$$\left(\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1}{n}$$

ou encore :

$$\frac{1}{n}\left(G_n(x)\right)^n < \frac{1}{n^{n+1}},$$

ce qui équivaut à $nG_n(x) < 1$. On a donc $n \in \mathbb{A}$.
On déduit alors de la question précédente que $\mathbb{A} = \mathbb{N}^*$, ce qui revient à dire que l'inégalité de Cauchy (avec son cas d'égalité) est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On se place toujours dans le cas où $n \geq 2$ et $x \in E_n$ et on définit la fonction Φ sur $[0,1]$ par :

$$\Phi(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(x_k + \frac{t}{n} \sum_{h=1}^{n} (x_h - x_k) \right) = \prod_{k=1}^{n} \left((1-t)\, x_k + \frac{t}{n} \right).$$

3.1. Pour tout $t \in [0,1]$ le réel $(1-t)\, x_k + \dfrac{t}{n}$ est dans le segment d'extrémités $x_k > 0$ et $\dfrac{1}{n} > 0$, c'est donc un réel strictement positif. On a donc $\Phi(t) > 0$ pour tout $t \in [0,1]$.

3.2. En notant $y_k = \dfrac{1}{n} - x_k$ pour tout k compris entre 1 et n, la dérivée logarithmique (qui se définie sans logarithme) de Φ est donnée par :

$$\forall t \in [0,1], \ \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} = \sum_{h=1}^{n} \frac{y_k}{y_k t + x_k},$$

ce qui donne :

$$\forall t \in [0,1], \ \left(\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} \right)' = -\sum_{h=1}^{n} \frac{y_k^2}{(y_k t + x_k)^2} < 0$$

(les x_k n'étant pas tous égaux, il y a au moins un y_k non nul). La fonction $\dfrac{\Phi'}{\Phi}$ est donc strictement décroissante sur $[0,1]$ et donc :

$$\forall t \in [0,1[, \ \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)} > \frac{\Phi'(1)}{\Phi(1)} = n \sum_{h=1}^{n} y_k = n \left(1 - \sum_{h=1}^{n} x_k \right) = 0$$

ce qui implique, compte tenu de $\Phi > 0$, que la fonction Φ est strictement croissante sur $[0,1]$.

3.3. L'inégalité $\Phi(0) < \Phi(1)$ équivaut à $nG_n(x) < 1$.

4.

4.1. Si $x \notin \Delta_n$, il a au moins deux composantes distinctes et quitte à renuméroter, on peut supposer que $x_1 = m = \min\limits_{1 \leq k \leq n} x_k$ et $x_2 = M = \max\limits_{1 \leq k \leq n} x_k$. On a bien sur $m < M$. En posant $x_1' = x_2' = \dfrac{m+M}{2}$, on a $x_1' + x_2' = x_1 + x_2$ et $x_1' x_2' = \dfrac{(x_1 + x_2)^2}{4} > x_1 x_2$ (ce qui équivaut à $(x_1 - x_2)^2 > 0$), ce qui donne pour $x' = (x_1', x_2', x_3, \ldots, x_n)$, $A_n(x') = A_n(x)$ et $G_n(x') > G_n(x)$.
Le résultat de cette question n'est pas utilisé dans ce qui suit.

4.2. Déjà vu en début de **A.II.**

4.3. La fonction ψ qui est continue (puisque polynomiale) sur le compact :

$$\overline{\Omega} = \left\{ x \in (\mathbb{R}^+)^{n-1} \mid \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \leq 1 \right\} = (\mathbb{R}^+)^{n-1} \cap B_1$$

où on a noté B_1 la boule unité de $(\mathbb{R}^{n-1}, \|\cdot\|_1)$ ($\overline{\Omega}$ est compact comme fermé borné dans un espace vectoriel normé de dimension finie) y est bornée et atteint ses bornes. Comme $\psi(x) \geq 0 = \psi(0)$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $\psi\left(\dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^n} > 0$, on a :

$$0 = \inf_{\overline{\Omega}} \psi(x) < M = \sup_{\overline{\Omega}} \psi(x).$$

Si l'une des composantes de x est nulle ou si $\sum_{k=1}^{n-1} x_k = 1$ (c'est-à-dire si x est sur le frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ de $\overline{\Omega}$) alors $\psi(x) = 0$, ce qui implique que le maximum de ψ est atteint en un point $\omega = (\omega_k)_{1\leq k\leq n-1}$ dans l'intérieur Ω de $\overline{\Omega}$. Pour tout k compris entre 1 et n, il existe un réel $r_k > 0$ tel que pour tout $t \in \left]-r_k, r_k\right[$ le point $\omega_t = \left(\omega'_j\right)_{1\leq j\leq n-1}$ défini par $\omega'_j = \omega_j$ si $j \neq k$ et $\omega'_k = \omega_k + t$ est dans l'ouvert Ω. La fonction g_k définie sur $\left]-r_k, r_k\right[$ par :

$$g_k(t) = \psi(\omega_t) = \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j - t\right)(\omega_k + t) \prod_{j=1,\ j\neq k}^{n-1} \omega_j$$

a un maximum en 0 et étant dérivable, on a nécessairement $g'_k(0) = 0$, soit :

$$-\omega_k \prod_{j=1,\ j\neq k}^{n-1} \omega_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j\right) \prod_{j=1,\ j\neq k}^{n-1} \omega_j = 0.$$

Le vecteur ω est donc solution du système linéaire :

$$\omega_k + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j = 1 \ \ (1 \leq k \leq n-1).$$

En réalité, cela revient à écrire la condition nécessaire d'extremum $\frac{\partial\psi}{\partial x_k}(\omega) = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n-1$.
En retranchant la ligne $k \neq 1$ à la ligne 1, on obtient $\omega_k = \omega_1$ et la première équation donne $\omega_1 = \frac{1}{n}$.
En définitive le maximum de ψ est atteint en $\omega = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ et il vaut $\frac{1}{n^n}$.
Cette preuve est due à Maclaurin (voir [4]).

5. Pour $x \in E_n$, on a $x \neq \omega = \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ et :

$$\begin{aligned}(G_n(x))^n &= \prod_{k=1}^{n} x_k = x_n \prod_{k=1}^{n-1} x_k = \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) \prod_{k=1}^{n-1} x_k \\ &= \psi(x) < \psi(\omega) = \frac{1}{n^n},\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $nG_n(x) < 1$.

A.III. On suppose que f, F sont deux fonctions à valeurs réelles définies sur $[a,b]$ telles que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \ F(y) - F(x) \geq (y-x) f(x). \tag{1}$$

Aucune hypothèse de continuité n'est faite sur f.
De (1) on déduit que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \ (y-x) f(x) \leq F(y) - F(x) \leq (y-x) f(y) \tag{2}$$

1. De l'encadrement (2) on déduit que $(y-x)(f(y) - f(x)) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, ce qui signifie que f est croissante. Elle est donc Riemann-intégrable sur $[a,b]$. De cet encadrement on déduit aussi que $|F(y) - F(x)| \leq \|f\|_\infty |y-x|$, où $\|f\|_\infty = \max(|f(a)|, |f(a)|)$, c'est-à-dire que F est lipschitzienne et donc continue.

2. Pour x, y, z dans $[a, b]$ et λ dans $[0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned}(1-\lambda) F(x) + \lambda F(y) - F(z) &= (1-\lambda)(F(x) - F(z)) + \lambda (F(y) - F(z)) \\ &\leq ((1-\lambda)(x-z) + \lambda (y-z)) f(z) \\ &\leq ((1-\lambda) x + \lambda y - z) f(z) = 0\end{aligned}$$

si $z = (1-\lambda) x + \lambda y$, ce qui prouve que F est convexe.

3. En additionnant les encadrements :

$$(a_{k+1} - a_k) f(a_k) \leq F(a_{k+1}) - F(a_k) \leq (a_{k+1} - a_k) f(a_{k+1}) \ \ (0 \leq k \leq n-1)$$

on obtient :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \leq F(b) - F(a) \leq T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_{k+1}),$$

les S_n et T_n étant des sommes de Riemann de f.

4. Prenant $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et faisant tendre n vers l'infini, on déduit que $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

En travaillant sur $[a, x]$, on a en fait $F(x) - F(a) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ pour tout t dans $[a, b]$ et on retrouve le fait que F est lipschitzienne.

A.IV. Tout est basé sur le fait que tout point $b \in]a, c[$ s'écrit $b = \lambda a + (1-\lambda) c$ avec $\lambda = \dfrac{c-b}{c-a}$ dans $]0, 1[$.

1. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors :

$$f(b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(c)$$

avec $1 - \lambda = \dfrac{b-a}{c-a}$, ce qui donne :

$$f(b) - f(a) \leq (1-\lambda)(f(c) - f(a)) = \frac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a)),$$

soit $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(c) - f(a)}{c-a}$ et :

$$f(b) - f(c) \leq \lambda (f(a) - f(c)) = \frac{c-b}{c-a}(f(a) - f(c)),$$

soit en multipliant par -1 :

$$f(c) - f(b) \geq \frac{c-b}{c-a}(f(c) - f(a))$$

ou encore $\dfrac{f(c) - f(a)}{c-a} \leq \dfrac{f(c) - f(b)}{c-b}$. On a donc :

$$a < b < c \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c-b}.$$

2. Pour $a < b < x$, on a :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

et pour $b < x < c$, on a :

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

ce qui donne :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) \leq f(x) - f(b) \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}(x - b)$$

qui par passage à la limite quand x tend vers b donne $\lim\limits_{x \to b^+} (f(x) - f(b)) = 0$, ce qui traduit la continuité à droite en b. La continuité à gauche se montre de manière analogue.

– B – Fonction exponentielle

1.

1.1. Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = 1$ pour toute $n \geq 1$, c'est-à-dire que la suite est stationnaire, donc croissante.
Pour $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un entier naturel non nul n_x tel que $n_x + x > 0$ (pour $x > 0$, $n_x = 1$ et pour $x < 0$ prendre $n_x > -x = |x|$). En notant $n_x = E(|x|) + 1$, où E désigne la fonction partie entière, on a $1 + \frac{x}{n} > 0$ pour tout $n \geq n_x$ et :

$$\begin{aligned}(u_n(x))^{\frac{1}{n+1}} &= G_{n+1}\left(1, 1 + \frac{x}{n}, \ldots, 1 + \frac{x}{n}\right) \\ &< A_{n+1}\left(1, 1 + \frac{x}{n}, \ldots, 1 + \frac{x}{n}\right) = (u_{n+1}(x))^{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

(comme $x \neq 0$, on a $1 + \frac{x}{n} \neq 1$ et l'inégalité de Cauchy est stricte). Il en résulte que la suite $(u_n(x))_{n \geq n_x}$ est strictement croissante.

1.2. Avec $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$ pour $n \geq n_x$, on déduit que la suite $(v_n(x))_{n \geq n_x}$ est strictement décroissante.

1.3. Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = v_n(0) = 1$ et les deux suites convergent vers $e(0) = 1$.
Pour $x \neq 0$, et $n \geq n_x$, on a :

$$\begin{aligned}v_n(x) - u_n(x) &= \frac{1}{u_n(-x)} - u_n(x) = \frac{1 - u_n(x)\, u_n(-x)}{u_n(-x)} \\ &= v_n(x)\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n\right).\end{aligned}$$

Comme $n^2 \geq n_x^2 > x^2$, on a $1 - \frac{x^2}{n^2} \in \left]0, 1\right[$, ce qui entraîne que $v_n(x) - u_n(x) > 0$ et on peut utiliser l'inégalité de Bernoulli pour écrire que $\left(1 - \frac{x^2}{n^n}\right)^n > 1 - \frac{x^2}{n}$, ce qui donne :

$$\forall n \geq n_x,\ 0 < v_n(x) - u_n(x) < v_n(x)\frac{x^2}{n} \leq v_{n_x}(x)\frac{x^2}{n}.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n(x) - u_n(x)) = 0$.
En définitive, les suites $(u_n(x))_{n \geq n_x}$ et $(v_n(x))_{n \geq n_x}$ sont adjacentes et elles convergent vers

une même limite $e(x)$.
Pour tout réel x, on a :

$$\forall n \geq n_x,\ 0 < u_n(x) \leq e(x) \leq v_n(x).$$

La fonction e est donc à valeurs strictement positives.

2.

2.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \geq n_x = E(|x|) + 1$, on a :

$$0 \leq e(x) - u_n(x) \leq v_n(x) - u_n(x) \leq v_n(x) \frac{x^2}{n}.$$

Pour $a < b$, on peut trouver un entier $n_0 > 0$ tel que $[a, b] \subset [-n_0, n_0]$ et on a $n_x \leq n_0 + 1$ pour tout $x \in [a, b]$, de sorte que :

$$\forall n \geq n_0 + 1,\ 0 \leq e(x) - u_n(x) \leq v_n(x) \frac{x^2}{n} \leq v_{n_0+1}(x) \frac{x^2}{n} \leq \frac{M}{n}$$

où $M = \sup_{x\in[a,b]} x^2 v_{n_0+1}(x)$ (la fonction continue $x \mapsto x^2 v_{n_0+1}(x)$ est bornée sur le compact $[a, b]$). La convergence uniforme sur $[a, b]$ de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq n_0+1}$ vers la fonction e s'en déduit alors immédiatement.
Les fonction polynomiales u_n étant continues, il en résulte que e est continue sur tout segment $[a, b]$ et donc sur $\mathbb{R}$.
Nous verrons un peu plus loin que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

2.2. Dans l'encadrement :

$$\forall n \geq n_x,\ 0 < u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e(x) \leq v_n(x) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n}$$

on peut utiliser l'inégalité de Bernoulli pour le terme de gauche quel que soit le réel x (pour $n \geq n_x > |x|$, on a $\frac{x}{n} > -1$) et on peut l'utiliser pour le terme de droite si $x < 1$ (dans ce cas on a bien $-\frac{x}{n} > -1$ et $1 - x > 0$ qui permet de passer à l'inverse), ce qui donne $1 + x \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e(x)$ pour tout réel x et $e(x) \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{1 - x}$ pour tout réel $x < 1$, ces inégalités étant strictes pour $x \neq 0$ (et $n \geq 2$).

2.3.

2.3.1. On a déjà vu en **B.I.3.** que e est à valeurs strictement positives. De plus pour tout réel x, on a :

$$\frac{1}{e(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n(x)} = \lim_{n\to+\infty} v_n(-x) = e(-x).$$

On a donc $e(x)\, e(-x) = 1$ pour tout réel x.

2.3.2. On montre, de manière plus générale, que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$ qui converge uniformément vers une fonction f, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $[a, b]$ qui converge vers $x \in [a, b]$, la suite $(u_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On sait déjà que f est continue sur $[a, b]$ comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues, que x est dans $[a, b]$ puisque cet ensemble est fermé et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} |u_n(x_n) - f(x)| &\leq |u_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \|u_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)|. \end{aligned}$$

La convergence uniforme sur $[a, b]$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f nous dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - f\|_\infty = 0$ et la continuité de f que $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(x)| = 0$. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = f(x)$.

Pour le cas qui nous intéresse, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to+\infty} u_n(\varepsilon_n) = e(0) = 1$$

pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

2.3.3. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on a :

$$u_n(x)\, u_n(y) = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = x + y + \dfrac{xy}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} x + y$. Il en résulte que :

$$e(x)\, e(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)\, u_n(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = e(x+y),$$

encore équivalent à $e(x+y)\, e(-x)\, e(-y) = 1$ (question **B.II.3.1.**).

2.4. On sait déjà que la fonction e est continue à valeurs strictement positives et solution de l'équation fonctionnelle $e(x+y) = e(x)\, e(y)$ avec $e(0) = 1$.

- Pour tout $x > 0$, on a $u_n(x) > 1$ pour tout $n \geq 1$, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ étant strictement croissante, il en résulte que $e(x) > 1$.
- On en déduit alors que la fonction e est strictement croissante. En effet, pour $x < y$, on a $\dfrac{e(y)}{e(x)} = e(y)\, e(-x) = e(y-x) > 1$.
- Avec $e(x) > u_1(x) = 1 + x$ pour $x > 0$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e(x) = +\infty$ et avec $e(-x) = \dfrac{1}{e(x)}$, on déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} e(x) = 0$.
- La fonction e réalise donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Son inverse est appelé fonction logarithme et noté $\ln$.
- Avec :
$$\frac{e(x)}{x^n} > \frac{u_{n+1}(x)}{x^n} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$$
pour $x > 0$ et $n \geq 1$, on déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e(x)}{x^n} = +\infty$.
- La fonction e est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $e' = e$. Il suffit en effet d'écrire que pour x, h dans $\mathbb{R}$ avec $h \neq 0$, on a :
$$\frac{e(x+h) - e(x)}{h} = e(x)\, \frac{e(h) - 1}{h}$$
et l'encadrement $1 + h \leq e(h) \leq \dfrac{1}{1-h}$ valable pour $h \in\,]-1, 1[$ nous donne $1 \leq \dfrac{e(h) - e(0)}{h} \leq \dfrac{1}{1-h}$ pour h non nul, qui entraîne $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e(h) - e(0)}{h} = 1$.
- On en déduit alors que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée égale à $\dfrac{1}{t}$. La fonction $\ln$ est donc la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $\dfrac{1}{t}$ nulle en 1.
- De $e' = e$, on déduit que e est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ ce qui implique que $\ln$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
- Avec $e'(x) = e(x) > 0$ pour tout réel x, on retrouve le fait que e est strictement croissante et avec $e''(x) = e(x) > 0$ on déduit que e est convexe sur $\mathbb{R}$.

– On retrouve également les propriétés classiques de la fonction logarithme.

2.5. On note $u_n = u_n(1)$ pour tout $n \geq 1$.

En notant $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite définis par $w_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, on a pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}(w_n)^{\frac{1}{n+1}} &= H_{n+1}\left(1, 1+\frac{1}{n-1}, \dots, 1+\frac{1}{n-1}\right)\\ &< G_{n+1}\left(1, 1+\frac{1}{n-1}, \dots, 1+\frac{1}{n-1}\right) = (w_{n-1})^{\frac{1}{n+1}},\end{aligned}$$

c'est-à-dire que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et avec $w_n - u_n = \frac{u_n}{n}$, on déduit que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Elles convergent donc toutes les deux vers $e = e(1)$ et on a l'encadrement :

$$0 \leq e - u_n \leq w_n - u_n = \frac{u_n}{n}.$$

De plus avec $w_n \leq w_6 = \left(1+\frac{1}{6}\right)^7 < 3$, on déduit que $u_n < 3$ pour $n \geq 6$ (on vérifie que c'est vrai aussi pour n entre 1 et 5), ce qui donne $0 \leq e - u_n \leq \frac{3}{n}$ pour tout $n \geq 1$ et la précision de 10^{-1} sera atteinte pour $n \geq 1$ tel que $\frac{3}{n} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{10}$, soit pour $n \geq 60$. Le calcul des u_{2^p} étant plus simple, on prend $n = 64 = 2^6$, ce qui donne $u_{2^6} \approx 2.697344953$. Pour $n = 2^7$, on a $u_{2^7} \approx 2.707739020$.

La procédure Maple qui suit donne un exemple de programmation du calcul des u_{2^p}.

```
restart;
f :=proc(p)
local n, k, t;
    n := 1 :
    for k from 1 to p do n :=2*n od :
    t := 1+ 1/n :
    for k from 1 to p do t :=t*t od :
    RETURN(evalf(t)) :
end :
```

2.6. Le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 (à ce stade du problème, on connaît cette fonction et ses propriétés) nous donne le développement asymptotique suivant :

$$\forall n \geq 1, \quad x_n = e\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

ce qui entraîne $e_n = e - u_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{e}{2n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = 1$. La convergence de cette suite vers le nombre e est donc lente.

Si considère la suite $(t_n)_{n\geq 0} = (u_{2^n})_{n\geq 0}$, on a alors $e - t_n \underset{+\infty}{\backsim} \frac{e}{2^{n+1}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e - t_{n+1}}{e - t_n} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que la convergence est géométrique.

On peut utiliser le procédé d'accélération de Richardson qui consiste à utiliser les suites accélératrices définies par :

$$\begin{cases} u_{n,0} = u_n = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^n} & (n \geq 0), \\ u_{n,k} = \dfrac{2^k u_{n+1,k-1} - u_{n,k-1}}{2^k - 1} & (k \geq 1). \end{cases}$$

Ce qui donne, par exemple, pour les trois premières suites :

$$\begin{cases} u_{n,0} = \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}, \\ u_{n,1} = 2u_{n+1,0} - u_{n,0}, \\ u_{n,2} = \dfrac{4u_{n+1,1} - u_{n,1}}{3}, \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} e - u_{n,0} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{e}{2}\dfrac{1}{2^n}, \\ e - u_{n,1} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{11e}{24}\dfrac{1}{2^{2n+1}}, \\ e - u_{n,2} \underset{+\infty}{\backsim} \dfrac{7e}{16}\dfrac{1}{2^{3(n+1)}}. \end{cases}$$

3. La définition précédente de la fonction exponentielle peut être étendue aux algèbres de Banach. On rappelle que si E est une algèbre unitaire sur $\mathbb{R}$, on dit que c'est une algèbre de Banach si elle est munie d'une norme multiplicative $x \mapsto \|x\|$ (c'est-à-dire que $\|\cdot\|$ est une norme sur E et $\|xy\| \leq \|x\| \|x\|$ pour tous x, y dans E) telle que $\|1\| = 1$ (où 1 est le neutre pour la multiplication) et si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. On peut considérer par exemple $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ qui est une algèbre de Banach commutative ou $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ muni d'une quelconque norme multiplicative. Cette dernière algèbre n'est pas commutative.
   Pour tout z dans E et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $u_n(z) = \left(1 + \dfrac{1}{n}z\right)^n$.
   Pour $z \in E$ et $m > n$, on a :

$$\begin{aligned} \|u_m(z) - u_n(z)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \left(C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right) z^k - \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} z^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right| \|z\|^k + \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} \|z\|^k \end{aligned}$$

   (comme z et 1 commutent, on peut utiliser la formule du binôme). Pour k compris entre 2 et n, on a :

$$\begin{aligned} C_m^k \frac{1}{m^k} &= \frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k! m^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \\ &\geq \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = C_n^k \frac{1}{n^k}, \end{aligned}$$

   et pour $k = 0$ ou 1, ces deux quantités valent 1. On a donc :

$$\begin{aligned} \|u_m(z) - u_n(z)\| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left(C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right) \|z\|^k + \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} \|z\|^k \\ &\leq u_m(\|z\|) - u_n(\|z\|) \end{aligned}$$

   et il en résulte que la suite $(u_n(z))_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$. Cet espace étant complet, la suite y est convergente. On note $e(z)$ sa limite dans E.
   Faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité précédente, on a :

$$\forall n \geq 1, \ \|e(z) - u_n(z)\| \leq e(\|z\|) - u_n(\|z\|)$$

   et on en déduit que la convergence est uniforme sur tout compact de E.
   Si $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E qui converge vers z, on en déduit que la suite

$(u_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $e(z)$.
En écrivant que :

$$u_n(z)\,u_n(-z)=\left(1-\frac{1}{n^2}z^2\right)^n=u_n\left(-\frac{1}{n}z^2\right)$$

(les polynômes en z commutent dans E), on en déduit par passage à la limite que $e(z)\,e(-z)=1$, c'est-à-dire que pour tout $z\in E$, $e(z)$ est inversible d'inverse $e(-z)$.
Pour z,z' dans E, qui commutent dans E, on a :

$$u_n(z)\,u_n(z')=\left(\left(1+\frac{1}{n}z\right)\left(1+\frac{1}{n}z'\right)\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}z_n\right)^n=u_n(z_n)$$

avec $z_n=z+z'+\dfrac{1}{n}zz'\underset{n\to+\infty}{\to}z+z'$. Il en résulte que :

$$e(z)\,e(z')=\lim_{n\to+\infty}u_n(z)\,u_n(z')=\lim_{n\to+\infty}u_n(z_n)=e(z+z').$$

Ce résultat est faux si z et z' ne commutent pas comme le montre l'exemple des matrices $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (voir [7], exercice 7.1.).

– C – L'exponentielle solution de $y'=y$, $y(0)=1$

1. Pour k,a dans $\mathbb{R}^*$, la fonction f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que $f'(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $f(0)=1$ si, et seulement si, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=af(kx)$ est solution de $g'(x)=kg(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $g(0)=a$.
   Pour k dans $\mathbb{R}^*$, la fonction f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que $f'(x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $f(0)=1$ si, et seulement si, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(kx)$ est solution de $g'(x)=kg(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $g(0)=1$.
2. Si Φ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\Phi'=\Phi$ et $\Phi(0)=a$, elle est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a :

$$\Phi(x)=\Phi(0)+\int_0^x\Phi'(t)\,dt=a+\int_0^x\Phi(t)\,dt.$$

   Réciproquement si Φ est continue et solution de cette équation intégrale, elle est alors dérivable de dérivée $\Phi'=\Phi$ et on a $\Phi(0)=a$.
3. Par linéarité de la dérivation et de l'évaluation en 0, on déduit que l'unicité d'une solution pour le problème $PC_{1,1}$ est équivalente à l'unicité pour le problème $PC_{1,0}$. On s'intéresse donc à ce dernier problème.
   Soit f une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=y$. De $f'=f$ on déduit facilement que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)}=f$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Si de plus $f(0)=0$, on a alors $f^{(n)}(0)=0$ pour $n\in\mathbb{N}$ et la formule de Taylor à l'ordre n entre 0 et $x\in\mathbb{R}^*$ s'écrit $f(x)=\dfrac{f^{(n)}(c_{n,x})}{n!}x^n$ où $c_{n,x}$ est un réel strictement compris entre 0 et x. Tenant compte de $f^{(n)}=f$, on a $f(x)=\dfrac{f(c_{n,x})}{n!}x^n$ et en utilisant le fait que la fonction continue f est bornée sur le segment d'extrémités $0,x$, on déduit qu'il existe une constante $M_x>0$ telle que $|f(x)|\leq M_x\dfrac{|x|^n}{n!}=\varepsilon_n(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\varepsilon_{n+1}(x)}{\varepsilon_n(x)}=0$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n(x)=0$ et $f(x)=0$. En définitive la fonction f est la fonction nulle.

4. Pour $h > 0$, la fonction ψ_h est continue affine par morceaux et telle que $\psi_h(nh) = (1+h)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, elle est donc définie par :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in [nh, ((n+1)h)],\ \psi_h(x) = (1+h)^n (x - nh + 1).$$

On trace facilement les graphes de ψ_1 et $\psi_{0.5}$ sur $[-1, 2]$.
La méthode d'Euler pour résoudre de façon approchée le problème $PC_{1,1}$ consiste à approximer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre dérivé $y'(nh)$ par la différence finie $\dfrac{y(nh+h) - y(nh)}{h}$, ce qui donne en tenant compte de $y' = y$:

$$y(nh) \backsimeq \frac{y(nh+h) - y(nh)}{h}$$

et donc $y(nh+h) \backsimeq (1+h)\, y(nh)$. En notant y_n la valeur approchée de $y(nh)$ obtenue à chaque étape, on a $y_{n+1} = (1+h)\, y_n$ et par récurrence $y_n = (1+h)^n$, en prenant $y_0 = y(0) = 1$.
Graphiquement le graphe de la solution y du problème $PC_{1,1}$ est remplacé par celui de ψ_h.

5.

5.1 Tout réel x étant dans un unique intervalle $[nh, ((n+1)h)[$, où $n = E\left(\dfrac{x}{h}\right)$, on peut écrire que :

$$\psi_h(x) = (1+h)^n (x - nh + 1) = (1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)} \left(1 + x - E\left(\frac{x}{h}\right) h\right).$$

On peut remarque que ψ_h est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}]nh, ((n+1)h)[$ avec :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in]nh, ((n+1)h)[,\ \psi_h'(x) = (1+h)^n.$$

En posant $\psi_h'(nh) = (1+h)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on définit une fonction ψ_h' qui est en escaliers sur $\mathbb{R}$ et croissante.

(a) Pour $x \geq 0$ dans $[nh, ((n+1)h)[$ avec $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\psi_h(x) &= \psi_h(x) - \psi_h(nh) + \psi_h(nh) \\ &= \psi_h(x) - \psi_h(nh) + \sum_{k=1}^{n} \left(\psi_h(kh) - \psi_h((k-1)h)\right) + \psi_h(0) \\ &= \int_{nh}^{x} \psi_h'(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)h}^{kh} \psi_h'(t)\, dt + 1 = \int_0^x \psi_h'(t)\, dt + 1\end{aligned}$$

(pour $n = 0$, la somme sur k n'apparaît pas et on utilise le fait que ψ_h' définie précédemment est continue par morceaux donc intégrable sur $[0, x]$).
Pour $x < 0$ dans $[nh, ((n+1)h)[$ avec $n \leq -1$, on a :

$$\begin{aligned}\psi_h(x) &= \psi_h(x) - \psi_h((n+1)h) + \psi_h((n+1)h) \\ &= \psi_h(x) - \psi_h((n+1)h) + \sum_{k=n+1}^{-1} \left(\psi_h(kh) - \psi_h((k+1)h)\right) + \psi_h(0) \\ &= \int_{(n+1)h}^{x} \psi_h'(t)\, dt + \sum_{k=n+1}^{-1} \int_{(k+1)h}^{kh} \psi_h'(t)\, dt + 1 = \int_0^x \psi_h'(t)\, dt + 1\end{aligned}$$

(pour $n = -1$, la somme sur k n'apparaît pas).
Soit dans tous les cas :

$$\psi_h(x) = 1 + \int_0^x \psi_h'(t)\, dt = 1 + \int_0^x (1+h)^{E\left(\frac{t}{h}\right)}\, dt.$$

5.3. Pour x, y dans $\mathbb{R}$, en utilisant la croissance de ψ_h', on a :

$$\psi_h(y) - \psi_h(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^y \psi_h'(t)\,dt \geq (y-x)\,\psi_h'(x) \text{ si } y \geq x, \\ \displaystyle -\int_y^x \psi_h'(t)\,dt \geq (y-x)\,\psi_h'(x) \text{ si } y \leq x, \end{cases}$$

soit dans tous les cas :

$$\psi_h(y) - \psi_h(x) \geq (y-x)\,\psi_h'(x) = (y-x)\,(1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)}. \tag{3}$$

5.4. Cette inégalité traduit la convexité de la fonction ψ_h (pour $a < b$, le graphe de ψ_h est sous la corde définie par a et b).

5.5. Pour $x < y$, on a $\psi_h(y) - \psi_h(x) \geq (y-x)\,(1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)} > 0$, donc la fonction ψ_h est strictement croissante.
Le résultat de la question **A.III.2.** nous dit que ψ_h est convexe.

6.

6.1. Comme on dit dans les bons ouvrages, le lecteur est prié de faire des dessins. On conjecture alors ce qu'on demande de prouver dans les questions qui suivent.

6.2. Pour $x > 0$, on écrit que $]0, x] = \bigcup_{p \geq 1} \left]\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}\right]$ et sur chaque intervalle $\left]\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}\right]$ on a $\alpha_x(h) = (1+h)^p\,(1+x-h)$. La fonction α_x est donc dérivable sur chacun de ces intervalles avec :

$$\alpha_x'(h) = p\,(1+h)^{p-1}\,(x-(p+1)\,h) < 0.$$

Elle y est donc strictement décroissante. De plus pour tout $p \geq 1$, on a $\lim\limits_{h \to \frac{x}{p}} \alpha_x(h) = \left(1+\frac{x}{p}\right)^p = \alpha_x\left(\frac{x}{p}\right)$, c'est-à-dire que α_x est continue sur $]0, x]$ et elle est décroissante sur cet intervalle.

6.3. Avec la croissance de ψ_h et β_x, on a pour tout $h \in]0, x]$:

$$\alpha_x(h) = \psi_h(x) \leq \psi_h((1+h)\,x) = \beta_x(h) \leq \beta_x(x).$$

6.4. La fonction α_x étant décroissante et majorée par $\beta_x(x)$ sur $]0, x]$, on a :

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha_x(h) = \sup_{h \in]0,x]} \alpha_x(h) \leq \beta_x(x),$$

c'est-à-dire que $\psi_h(x)$ a une limite en 0^+ pour tout $x > 0$.
Ce résultat est aussi valable pour $x \leq 0$.

7. On peut donc définir la fonction $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ par $\mathcal{E}(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \psi_h(x)$.

7.1. Chaque fonction ψ_h étant croissante, convexe et à valeurs positives, il en est de même de $\mathcal{E}$. La convexité de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}$ entraîne la continuité.

7.2. Avec $hE\left(\frac{x}{h}\right) \leq x < hE\left(\frac{x}{h}\right) + h$, on déduit que $0 \leq x - hE\left(\frac{x}{h}\right) < h$ et donc $\lim\limits_{h \to 0}\left(x - hE\left(\frac{x}{h}\right)\right) = 0$. Puis avec $(1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)} = \dfrac{\psi_h(x)}{1+x-E\left(\frac{x}{h}\right)h}$, on déduit que $\lim\limits_{h \to 0}(1+h)^{E\left(\frac{x}{h}\right)} = \lim\limits_{h \to 0}\psi_h(x) = \mathcal{E}(x)$ et en faisant tendre h vers 0 dans (3) on en déduit que pour tous réels x, y, on a $\mathcal{E}(y) - \mathcal{E}(x) \geq (y-x)\,\mathcal{E}(x)$.

7.3. On déduit alors de l'étude faite en **A.III.** que pour tout réel x on a $\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}(0) + \int_0^x \mathcal{E}(t)\,dt$. La fonction $\mathcal{E}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, cela équivaut à dire que $\mathcal{E}$ est solution de $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = \mathcal{E}(0) = 1$.

8.

8.1. En utilisant le résultat de la question **C.1**. on déduit que l'unique solution du problème $PC_{k,a}$, pour $(k,a) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est $y(x) = a\mathcal{E}(kx)$.

8.2. En dérivant par rapport à x la fonction $\varphi(x,y) = \mathcal{E}(x+y) - \mathcal{E}(x)\mathcal{E}(y)$, on a $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \varphi(x,y)$ avec $\varphi(0,y) = 0$, ce qui équivaut à dire que φ est nulle (0 est l'unique solution de $PC_{1,0}$) et donc $\mathcal{E}$ vérifie la même équation fonctionnelle que l'exponentielle.

8.3. Comme e et $\mathcal{E}$ sont solutions du problème $PC_{1,1}$, on a $e = \mathcal{E}$ par unicité.

2 Remarques et compléments

2.1 La méthode d'Euler pour l'équation $y' = y$

La méthode d'Euler est basée sur le théorème des accroissements finis qui permet d'écrire, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage du point x :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) \backsimeq f(x) + hf'(x),$$

où h est réel non nul destiné à tendre vers 0 et θ (qui dépend de x et h) est dans $]0,1[$.

D'un point de vue géométrique, on remplace au voisinage de x le graphe de f par sa tangente en x.

On s'intéresse ici au problème de Cauchy qui consiste à déterminer une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = 1, \\ \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = y(x). \end{array} \right. \tag{4}$$

En supposant que ce problème admet une solution (ce que nous dit le théorème de Cauchy-Lipschitz) on se fixe un réel $x > 0$ et on va utiliser la méthode d'Euler pour obtenir une valeur approchée de $y(x)$. Pour ce faire on se donne un entier $n \geq 1$ auquel on associe la subdivision de $[0, x]$ définie par les points :

$$x_k = k\frac{x}{n}\ \ (0 \leq k \leq n)$$

et on va définir une suite $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ d'approximations des éléments de la suite $(y(x_k))_{0 \leq k \leq n}$.

Pour $k = 0$, on pose $y_0 = y(x_0) = 1$.

En supposant construits $y_0, \ldots, y_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$, on écrit que :

$$y(x_k) = y\left(x_{k-1} + \frac{x}{n}\right) \backsimeq y(x_{k-1}) + \frac{x}{n}y'(x_{k-1}) = y(x_{k-1})\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

et avec $y(x_{k-1}) \backsimeq y_{k-1}$, on obtient l'approximation :

$$y(x_k) \backsimeq y_k = y_{k-1}\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

La suite $(y_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc définie par la relation de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = 1 \\ y_k = y_{k-1}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)\ \ (1 \leq k \leq n) \end{array} \right.$$

ce qui donne $y_k = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^k$ et en particulier on a l'approximation :

$$y(x) = y(x_n) \backsimeq y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

2.2 La suite de fonctions $\left(\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n \geq 1}$

Nous sommes donc amené à étudier la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

et nous allons montrer dans ce paragraphe que cette suite converge vers une fonction f qui est l'unique solution du problème (4) .

Pour $x = 0$, cette suite est stationnaire sur 1.

Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 1 *Pour tout réel x, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x)\, u_n(-x) = 1.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$1 - u_n(x)\, u_n(-x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = \frac{x^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^k.$$

Pour tout $n > |x|$, on a $0 < 1 - \dfrac{x^2}{n^2} \leq 1$ et :

$$|1 - u_n(x)\, u_n(-x)| \leq \frac{x^2}{n^2} n = \frac{x^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

■

En notant E la fonction partie entière, on associe à tout réel x l'entier n_x défini par :

$$n_x = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \geq 0, \\ E(|x|) + 1 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

et on a $u_n(x) > 0$ pour tout $n \geq n_x$.

Nous allons montrer dans ce qui suit que pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $f(x) > 0$. En utilisant le lemme précédent on voit qu'il suffit de montrer ce résultat pour $x > 0$ ou pour $x < 0$.

Lemme 2 *Pour tout entier $n_0 \geq 1$ et tout entier $n \geq n_0$, la fonction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $]-n_0, 0]$.*

Démonstration. On se fixe un entier $n_0 \geq 1$.

Pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in]-n_0, 0]$, on a $n \geq n_0 > -x$ et $u_n(x) > 0$, cette inégalité étant également vérifiée pour $x > 0$ et $n \geq 1$.

Pour $n \geq n_0$ la restriction de la fonction u_n à $]-n_0, +\infty[$ est dérivable à valeurs strictement positives avec $\dfrac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \dfrac{n}{n+x}$ et :

$$\forall x \in]-n_0, +\infty[, \ \frac{u_{n+1}'(x)}{u_{n+1}(x)} - \frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \frac{x}{(n+x)(n+1+x)}.$$

En utilisant $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)' = \dfrac{u_{n+1}'u_n - u_{n+1}u_n'}{u_n^2}$, on en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x > 0, \ \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) > 0, \\ \forall x \in]-n_0, 0[, \ \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) < 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que pour $n \geq n_0$, la fonction $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $]-n_0, 0]$. ■

Lemme 3 *Pour tout réel x la suite $(u_n(x))_{n\geq n_x}$ est à valeurs strictement positives et pour tout entier $n_0 \geq 1$, tout réel non nul x dans $]-n_0, +\infty[$, la suite $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.*

Démonstration. Par définition de n_x, on a $u_n(x) > 0$ pour tout réel x et tout entier $n \geq n_x$.

Pour x non nul dans $]-n_0, +\infty[$ le lemme précédent nous dit que :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} > \frac{u_{n+1}(0)}{u_n(0)} = 1,$$

c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante. ∎

Remarque 4 *La croissance de la suite $(u_n(x))_{n\geq n_x}$ peut aussi se montrer directement en utilisant l'inégalité de Bernoulli à savoir : $(1-a)^n > 1 - na$ pour $a < 1$ non nul.*
Pour $n \geq n_x$ on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x) &= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{1+\dfrac{x}{n+1}}{1+\dfrac{x}{n}}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{1+x+n}{1+x+n+\dfrac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n^2+(1+x)n+x}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Pour $x < 0$, on a $\dfrac{x}{(n+1)(n+x)} < 0$ et pour $x > 0$, $\dfrac{x}{(n+1)(n+x)} < 1$ (c'est équivalent à $n^2 + (1+x)n > 0$), on peut donc utiliser l'inégalité de Bernoulli pour écrire que :

$$\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} > 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x}$$

et donc :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{n}{n+x} = 1$$

Théorème 5 *Pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $f(x)$.*
De plus on a $f(0) = 1$, $f(x) > 0$ et $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ pour tout réel x.

Démonstration. Pour $x = 0$ on a $u_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(0) = 1 = f(0)$.

Pour $x < 0$, on a $0 < 1 + \dfrac{x}{n} < 1$ et $0 < u_n(x) < 1$ pour tout $n \geq n_x$, c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n\geq n_x}$ est bornée et comme par ailleurs elle est croissante à partir d'un certain rang n_0, on en déduit qu'elle est convergente. On note $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x)$. De la stricte croissance de $(u_n(x))_{n\geq n_0}$, on déduit que $f(x) > u_{n_0}(x) > 0$.

Enfin pour $x > 0$, on a :

$$u_n(x) = \frac{u_n(x)\,u_n(-x)}{u_n(-x)} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{f(-x)}$$

(lemme 1), soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$. ∎

Remarque 6 *De $f(x)f(-x) = 1$ pour tout réel x, on déduit que f n'est pas une fonction polynomiale. En effet si f est polynomiale de degré $n \geq 0$ (f n'est pas nulle), alors $f(x)f(-x)$ est polynomiale de degré $2n$ et constante, on a donc $n = 0$ et f est constante, ce qui est incompatible avec $f(x) > u_1(x) = 1 + x$ pour $x > 0$.*

Remarque 7 *Avec :*

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n(-x)},$$

on déduit que $f(x)$ est aussi limite de la suite $(v_n(x))_{n\geq n_{-x}}$ définie par :

$$\forall n \geq n_{-x},\ v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)} = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Pour x non nul, il existe un entier n_0 tel que $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante, $(v_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement décroissante et en conséquence :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n(x) < f(x) < v_n(x).$$

Lemme 8 *Pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, on a :*

$$1+x \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}.$$

Démonstration. Pour $n_0 = 1$ et $x \in \left]-1,+\infty\right[$ on a vu précédemment que la suite $(u_n(x))_{n\geq1}$ est strictement croissante et donc $u_1(x) = 1+x \leq f(x)$.

Pour $x \in \left]-1,1\right[$, $-x$ est aussi dans $\left]-1,1\right[$ et on a $u_1(-x) = 1-x \leq f(-x)$, ce qui donne $f(x) = \dfrac{1}{f(-x)} \leq \dfrac{1}{1-x}$. ∎

Lemme 9 *La fonction f est continue en 0.*

Démonstration. Du lemme précédent on déduit immédiatement que $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1 = e(0)$, ce qui signifie que f est continue en 0. ∎

Lemme 10 *Pour tout suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = f(x)$.*

Démonstration. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n(x_n) = \frac{u_n(x_n)\,u_n(-x)}{u_n(-x)}$$

avec :

$$u_n(x_n)\,u_n(-x) = \left(\left(1+\frac{x_n}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n = u_n(\varepsilon_n)$$

où :

$$\varepsilon_n = x_n - x - \frac{xx_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Pour n assez grand, on a $\varepsilon_n \in \left]-1,+\infty\right[$ de sorte que la suite $(u_m(\varepsilon_n))_{m\geq1}$ est croissante et donc :

$$u_1(\varepsilon_n) = 1+\varepsilon_n \leq u_n(\varepsilon_n) \leq f(\varepsilon_n)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_1(\varepsilon_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\varepsilon_n) = 1$ (continuité de f en 0), ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = 1$.

On a donc en définitive $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)\,u_n(-x) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$. ∎

Théorème 11 *Pour tous x,y dans $\mathbb{R}$ on a $f(x+y) = f(x)\,f(y)$.*

Démonstration. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on a :

$$u_n(x)\, u_n(y) = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = x + y + \dfrac{xy}{n} \underset{n \to +\infty}{\to} x + y$. On déduit alors du lemme précédent que :

$$f(x)\, f(y) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)\, u_n(y) = \lim_{n \to +\infty} u_n(z_n) = f(x + y).$$

■

Corollaire 12 *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ on a :

$$f(y) - f(x) = f(x + y - x) - f(x) = f(x)\,(f(y - x) - 1) \underset{y \to x}{\to} 0$$

en utilisant la continuité en 0 de f. ■

Remarque 13 *La continuité de f peut aussi se montrer en utilisant le fait que f est convexe. En effet pour tout $n_0 \geq 1$ et tout $n \geq n_0$ la fonction u_n est convexe sur $]-n_0, +\infty[$ (sa dérivée seconde est positive sur cet intervalle), donc $f = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ est aussi convexe sur cet intervalle. Comme n_0 est quelconque, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$. Sachant qu'une fonction convexe sur un intervalle est continue sur l'intérieur, on déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.*

En utilisant le lemme de Dini, on peut montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle compact $[a, b]$.

Théorème 14 *Si $I = [a, b]$ est un intervalle réel compact, alors la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.*

Démonstration. On peut trouver un entier n_0 tel que $I = [a, b] \subset]-n_0, +\infty[$ et pour tout x dans I la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est croissante. En se restreignant à I, on a donc une suite croissante $(u_n)_{n \geq n_0}$ de fonctions continues sur I qui converge simplement sur I vers une fonction continue f, le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme sur I. ■

Remarque 15 *Sachant qu'une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynomiales est nécessairement polynomiale (exercice classique), on en déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ne peut converger uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f puisque cette dernière n'est pas polynomiale.*

Théorème 16 *La fonction f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.*

Démonstration. Avec le lemme 8 on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$1 \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x}$$

et donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = 1$, ce qui signifie que f est dérivable en 0 de dérivée égale à 1. Puis avec :

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f(x)\, \frac{f(h) - 1}{h}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$, on déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f(x)$, ce qui signifie que f est dérivable en x avec $f'(x) = f(x)$. Comme $f(0) = 1$, la fonction f est bien solution du problème de Cauchy.

Si y est une autre solution, la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y(x) f(-x)$ est telle que $z' = 0$ avec $z(0) = 0$, c'est donc la fonction nulle et nécessairement $y(x) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$ pour tout réel x. ■

De ce résultat on déduit que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)} = f$ pour tout entier naturel n.

De l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction f, on déduit facilement par récurrence que, pour tout réel non nul a, on a $f(n\cdot a) = (f(a))^n$ pour tout entier naturel n, puis avec $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$, on déduit que cette relation est valable pour tout entier relatif n. Si $r = \dfrac{p}{q}$ est un entier relatif, on a alors $f(r) = f\left(p\dfrac{1}{q}\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{q}\right)\right)^p$ et avec $f(1) = f\left(q\dfrac{1}{q}\right) = \left(f\left(\dfrac{1}{q}\right)\right)^q$, on déduit que $f\left(\dfrac{1}{q}\right) = (f(1))^{\frac{1}{q}}$ et $f(r) = (f(1))^{\frac{p}{q}} = (f(1))^r$.

En notant $e = f(1)$, on a donc $f(r) = e^r$ pour tout rationnel r, ce qui nous conduit à noter $f(x) = e^x$ pour tout réel x et la fonction ainsi définie est appelée fonction exponentielle réelle. On la note aussi $f(x) = \exp(x)$.

2.3 La suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Si y est solution du problème (4), elle est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $y^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel non nul x, la formule de Taylor à l'ordre n nous donne alors :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\theta x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} y(\theta x)$$

avec $\theta \in]0,1[$. Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, on en déduit alors que $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, c'est-à-dire que y est limite de la suite de fonctions $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Le lien entre cette suite et la suite $\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ peut être précisé comme suit.

Lemme 17 *Pour tous $x > 0$ et n, p dans $\mathbb{N}^*$ on a :*

$$u_n(x) \leq w_n(x) \leq u_{n+p}(x).$$

Démonstration. Avec $C_n^k = 0$ et $\dfrac{C_n^k}{n^k} = \dfrac{1}{k!} \prod\limits_{j=0}^{k-1} \left(1 - \dfrac{j}{n}\right) \leq \dfrac{1}{k!}$ pour $1 \leq k \leq n$, on déduit que $u_n(x) \leq w_n(x)$ et avec $C_{n+p}^0 = 1$, $C_{n+p}^k = \dfrac{1}{k!} \prod\limits_{j=0}^{k-1} (n+p-j) > \dfrac{1}{k!}$ pour $1 \leq k \leq n$, on déduit que $w_n(x) \leq u_{n+p}(x)$. ■

En particulier, pour $p = n^2$, on a :

$$u_{n+n^2}(x) < \left(1+\frac{x}{n^2}\right)^{n^2}\left(1+\frac{x}{n^2}\right)^{n} = u_{n^2}(x)\,u_n\left(\frac{x}{n}\right)$$

et de $u_n(x) \leq w_n(x) \leq u_{n^2}(x)\,u_n\left(\frac{x}{n}\right)$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n(x) = e^x$ (on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\left(\frac{x}{n}\right) = e^0 = 1$), c'est-à-dire que $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout réel $x > 0$, ce résultat étant encore vrai pour $x = 0$.

Si on se place maintenant sur une algèbre de Banach E, on a pour tout $z \in E$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|w_n(z) - u_n(z)\| &= \left\|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right) z^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right)\|z\|^k \\ &\leq w_n(\|z\|) - u_n(\|z\|) \underset{n\to+\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

et donc $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ pour tout $z \in E$ (ce qui montre au passage, en prenant $E = \mathbb{R}$, que ce résultat est vrai pour les réel négatifs).

2.4 Une définition du logarithme

Si on veut définir la fonction logarithme comme réciproque de l'exponentielle à partir d'une suite de fonctions, on part de l'équation $y = u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ où $y > 0$ et $n \geq 1$ sont donnés. Une solution de cette équation est $x = n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right)$.

On est donc ainsi amené à considérer la suite de fonctions $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ w_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right),$$

la fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ étant la fonction réciproque sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de la fonction $x \mapsto x^n$. On rappelle que cette fonction est indéfiniment dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

Le résultat suivant nous sera utile.

Lemme 18 *Pour tout réel $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.*

Démonstration. Avec $\sqrt[n]{1} = 1$ et $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, il suffit de montrer le résultat pour $x > 1$. Dans ce cas la suite $\left(\sqrt[n]{x}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante ($\sqrt[n+1]{x} < \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x < x^{\frac{n+1}{n}} = x\sqrt[n]{x}$ encore équivalent à $\sqrt[n]{x} > 1$) et minorée par 1, elle converge donc vers un réel $\ell \geq 1$. Si $\ell > 1$, pour $\lambda \in]1, \ell[$ il existe un entier n_0 tel que $\sqrt[n]{x} > \lambda$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $x > \lambda^n$ pour tout $n \geq n_0$ qui est incompatible avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$. ■

Théorème 19 *Pour tout réel $x > 0$ la suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell(x)$ tel que $\ell(1) = 0$, $\ell(x) > 0$ pour $x > 0$ et $\ell(x) < 0$ pour $x \in]0, 1[$.*

Démonstration. Pour $x = 1$, la suite est stationnaire sur 0.

En notant $\alpha_n(x) = w_n(x) - w_{n+1}(x)$, on définit une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0,\ \alpha_n'(x) = x^{\frac{1}{n}-1} - x^{\frac{1}{n+1}-1} = x^{-\frac{n}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right).$$

La fonction α_n est donc strictement décroissante sur $]0, 1[$, strictement croissante sur $]1, \infty[$ avec $\alpha_n(1) = 0$, il en résulte que $\alpha_n(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\}$.

La suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante minorée par 0 pour tout $x > 1$, elle converge donc vers un réel $\ell(x) \geq 0$.

Si $x \in \left]0,1\right[$, il s'écrit $x = \dfrac{1}{y}$ avec $y > 1$ et :

$$w_n(x) = n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{y}} - 1\right) = -\frac{w_n(y)}{\sqrt[n]{y}} \underset{n\to+\infty}{\to} \ell(x) = -\ell(y) \leq 0.$$

Pour $x \in \left]0,1\right[$ la suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant strictement décroissante à valeurs strictement négatives on a $\ell(x) < w_1(x) < 0$. Il en résulte que $\ell(x) = -\ell\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ pour $x > 1$. ■

On définit donc une fonction ℓ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0,\ \ell(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right).$$

Théorème 20 *La fonction ℓ est solution sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de l'équation fonctionnelle $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$.*

Démonstration. Pour x, y dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} w_n(xy) &= n\left(\sqrt[n]{xy} - 1\right) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)\sqrt[n]{y} + n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right) \\ &= w_n(x)\sqrt[n]{y} + w_n(y) \end{aligned}$$

et en passant à la limite on a le résultat. ■

On retrouve $\ell(1) = 0$ et $\ell\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ell(x)$.

Corollaire 21 *Pour tout réel $x > 0$ et tout nombre rationnel r, on a $\ell(x^r) = r\ell(x)$.*

Démonstration. Avec l'équation fonctionnelle, on montre facilement par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\quad \ell(x^p) = p\ell(x).$$

En écrivant, pour tout $p \geq 1$, que $\ell(x) = \ell\left(\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)$, on déduit que $\ell\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \dfrac{1}{p}\ell(x)$ et il en résulte que pour tout rationnel positif $r = \dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, on a :

$$\ell(x^r) = \ell\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p\ell\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q}\ell(x) = r\ell(x).$$

Enfin avec $\ell\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ell(x)$, on déduit que le résultat précédent est encore valable pour tout rationnel négatif. ■

Lemme 22 *La fonction ℓ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Démonstration. La croissance de ℓ résulte immédiatement de celle des w_n.

On peut aussi écrire pour $0 < x < y$ que :

$$0 < \ell\left(y\frac{1}{x}\right) = \ell(y) - \ell(x),$$

ce qui donne la stricte croissance. ■

Lemme 23 *La fonction ℓ est continue en 1.*

Démonstration. Avec $0 < \ell\left(2^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{1}{n}\ell(2)$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell\left(2^{\frac{1}{n}}\right) = 0$ et avec $\ell\left(2^{-\frac{1}{n}}\right) = -\dfrac{1}{n}\ell(2) < 0$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell\left(2^{-\frac{1}{n}}\right) = 0$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut donc trouver un entier n_0 tel que $-\varepsilon < \ell\left(2^{-\frac{1}{n}}\right) < \ell\left(2^{\frac{1}{n}}\right) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Pour tout x dans le voisinage ouvert de 1, $I_\varepsilon = \left]2^{-\frac{1}{n_0}}, 2^{\frac{1}{n_0}}\right[$, on a du fait de la croissance de ℓ :

$$-\varepsilon < \ell\left(2^{-\frac{1}{n_0}}\right) < \ell(x) < \ell\left(2^{\frac{1}{n_0}}\right) < \varepsilon.$$

On a donc ainsi montré que ℓ est continue en 1 (on a $\ell(1) = 0$). ■

Théorème 24 *La fonction ℓ est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Démonstration. Résulte de :

$$\ell(x) - \ell(x_0) = \ell\left(\frac{x}{x_0}\right) - \ell(1).$$

■

Théorème 25 *La fonction ℓ est concave sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Démonstration. Résulte de la concavité des w_n. ■

On retrouve ainsi la continuité de ℓ.

On peut en fait montrer très simplement, sans les considérations précédentes (excepté le lemme 18), que la suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^{+,*}$ vers une fonction dérivable de dérivée égale à $\dfrac{1}{x}$.

Théorème 26 *La suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge sur $\mathbb{R}^{+,*}$ vers la primitive nulle en 1 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.*

Démonstration. Chaque fonction w_n est dérivable et pour tout $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{x}}{x} = \dfrac{1}{x}$. De plus pour tout $R > 1$ et tout $x \in \left[\dfrac{1}{R}, R\right]$, on a :

$$\left|w_n'(x) - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}\left|\sqrt[n]{x} - 1\right| \leq R\left(\sqrt[n]{R} - 1\right)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{R} - 1\right) = 0$, ce qui signifie que la suite $(w_n'(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $\dfrac{1}{x}$ sur $\left[\dfrac{1}{R}, R\right]$. Comme de plus la suite $(w_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, on en déduit que la suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\left[\dfrac{1}{R}, R\right]$ vers une fonction dérivable ℓ de dérivée égale à $\dfrac{1}{x}$. On a donc $\ell(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{R}, R\right]$. Ce résultat étant valable pour tout $R > 1$, il est vrai sur $\mathbb{R}^{+,*}$.
■

On retrouve donc ainsi la définition classique du logarithme et ses propriétés usuelles s'en déduisent.

2.5 Sur l'inégalité de Bernoulli

L'inégalité de Bernoulli peut aussi se déduire de celle de Cauchy en écrivant pour $a > -1$, $a \neq 0$:

$$1 + a = A_n\left(1, 1, \ldots, 1 + na\right) > G_n\left(1, 1, \ldots, 1 + na\right) = (1 + na)^{\frac{1}{n}}.$$

Plus généralement on a l'inégalité :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) > 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$$

pour $a = (a_1, \ldots, a_n) \in (]-1, 0[)^n \cup (]0, +\infty[)^n$. En posant $x_k = 1 + a_k$, $D_n = (]0, 1[)^n \cup (]1, +\infty[)^n$, il s'agit de montrer que :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in D_n,\ P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k + n - 1 > 0.$$

Avec $P_2(x) = (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$ pour tout $x \in D_2$ et :

$$P_{n+1}(x, x_{n+1}) = (x_{n+1} - 1)\left(\prod_{k=1}^{n} x_k - 1\right) + P_n(x) > P_n(x)$$

pour tout $(x, x_{n+1}) \in D_{n+1}$ le résultat se déduit par récurrence sur $n \geq 2$.

2.6 Sur l'inégalité de Cauchy

2.6.1 Démonstration par récurrence

La démonstration de Cauchy peut s'écrire de manière plus rapide comme suit.

Pour $n = 2$, on a :

$$G_2^2(x) = x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 = A_2^2(x)$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $x_1 = x_2$.

Pour $n = 2^p$ avec $p \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} G_{2^p}^{2^p}(x) &= \prod_{k=1}^{2^{p-1}} x_{2k-1} x_{2k} = \prod_{k=1}^{2^{p-1}} \left(\left(\frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_{2k-1} - x_{2k}}{2}\right)^2\right) \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^{2^{p-1}} \left(\frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}\right)\right)^2 = G_{2^{p-1}}^{2^p}(y) \end{aligned}$$

en posant $y_k = \dfrac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}$ pour tout k compris entre 1 et 2^{p-1}. En supposant que $G_{2^{p-1}}(y) \leq A_{2^{p-1}}(y)$, on obtient $G_{2^p}^{2^p}(x) \leq A_{2^{p-1}}^{2^p}(y)$ avec :

$$A_{2^{p-1}}(y) = \frac{1}{2^{p-1}} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} \frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2} = A_{2^p}(x).$$

L'égalité $G_{2^p}(x) = A_{2^p}(x)$ équivaut à $x_{2k-1} = x_{2k}$ pour tout k compris entre 1 et 2^{p-1} et $G_{2^{p-1}}(y) = A_{2^{p-1}}(y)$, ce qui équivaut à dire que tous les y_k et donc tous les x_k sont égaux.
Ensuite pour n quelconque on peut trouver p tel que $n \leq 2^p$ et en définissant $y = (y_k)_{1 \leq k \leq 2^p}$ par $y_k = x_k$ si $1 \leq k \leq n$ et $y_k = A_n(x)$ si $k + 1 \leq k \leq 2^p$, de $G_{2^p}(y) \leq A_{2^p}(y)$, on déduit que :

$$G_n(x) = (G_n(x))^{\frac{n}{2^p}} (A_n(x))^{\frac{2^p - n}{2^p}} \leq \frac{n}{2^p} A_n(x) + \frac{2^p - n}{2^p} A_n(x) = A_n(x),$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les y_k, et donc tous les x_k, sont égaux.

2.6.2 Moyenne harmonique

En notant $H_n(x) = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i}}$ la moyenne harmonique des $x_i > 0$, on a $H_n(x) = \dfrac{1}{A_n(y)}$ où $y = \left(\dfrac{1}{x_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ et de ce qui précède, on déduit que :

$$H_n(x) \leq G_n(x) \leq A_n(x)$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les x_i sont égaux.

En effet, on a :

$$H_n(x) = \frac{1}{A_n(y)} \leq \frac{1}{G_n(y)} = G_n(x) \leq A_n(x).$$

2.7 Généralisation de l'inégalité de Cauchy

De manière plus générale, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$, on définit les moyennes arithmétiques et géométriques par :

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k x_k, \ \ G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k^{r_k}$$

où $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$ est tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} r_k = 1$. Bien entendu, la définition de G_n utilise le logarithme (naturellement définie comme primitive de $\dfrac{1}{x}$ nulle en 1) et l'exponentielle (inverse du logarithme). On a alors $G_n(x) \leq A_n(x)$, l'égalité étant réalisée si, et seulement si, tous les x_i sont égaux.

2.7.1 Démonstration utilisant la concavité du logarithme

Une première démonstration (classique) peut se faire en utilisant la concavité de la fonction ln qui permet d'écrire :

$$\ln(G_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} r_k \ln(x_k) \leq \ln\left(\sum_{k=1}^{n} r_k x_k\right) = \ln(A_n(x)),$$

ce qui équivaut, du fait de la croissance de la fonction exp, à $G_n(x) \leq A_n(x)$.

2.7.2 Démonstration par récurrence

On peut aussi procéder par récurrence comme suit.

Pour $n = 2$, on se donne $0 < x_1 < x_2$, $r_1 \in]0,1[$ et $r_2 = 1 - r_1$. Il s'agit alors de montrer que $x_1^{r_1} x_2^{1-r_1} < r_1 x_1 + (1 - r_1) x_2$, ou encore $x_2^{1-r_1} - x_1^{1-r_1} < (1 - r_1)(x_2 - x_1) x_1^{-r_1}$. Le théorème des accroissements finis nous permet d'écrire que $x_2^{1-r_1} - x_1^{1-r_1} = (1 - r_1)(x_2 - x_1) x_3^{-r_1}$ avec $x_3 \in]x_1, x_2[$, ce qui donne le résultat ($x_1 < x_3 \Rightarrow x_1^{r_1} < x_3^{r_1}$). On a donc bien $G_2(x) < A_2(x)$ pour $x_1 \neq x_2$, l'égalité étant évidemment réalisée pour $x_1 = x_2$. Supposons le résultat acquis au rang $n \geq 2$ et soit $r = (r_1, \ldots, r_{n+1}) \in (\mathbb{R}^{+,*})^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n+1} r_k = 1$. Posons $s = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k$ et $r' = \dfrac{1}{s}(r_1, \ldots, r_n)$. On a

$r' \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$ avec $\sum_{k=1}^{n} r'_k = 1$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in (\mathbb{R}^{+,*})^{n+1}$, on a alors :

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= \left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{r'_k}\right)^s x_{n+1}^{r_{n+1}} \leq s \prod_{k=1}^{n} x_k^{r'_k} + r_{n+1} x_{n+1} \\ &\leq s \sum_{k=1}^{n} r'_k x_k + r_{n+1} x_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} r_k x_k, \end{aligned}$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, il y a égalité pour le cas 2, ce qui équivaut à $\prod_{k=1}^{n} x_k^{r'_k} = x_{n+1}$ et égalité pour le cas n, ce qui équivaut à dire que tous les x_k sont égaux pour k compris entre 1 et n (hypothèse de récurrence), tous les x_k pour k compris entre 1 et $n+1$ sont donc égaux.

2.7.3 Une autre démonstration

Une autre démonstration (moins classique) est la suivante.

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

Si $m = \min_{1 \leq k \leq} x_k$ et $M = \max_{1 \leq k \leq n} x_k$, on a $m = \prod_{k=1}^{n} m^{r_k} \leq \prod_{k=1}^{n} x_k^{r_k} \leq \prod_{k=1}^{n} M^{r_k} = M$, il existe donc un entier k tel que $x_k \leq G_n(x) \leq x_{k+1}$. On a alors :

$$S = \sum_{j=1}^{k} r_j \int_{x_j}^{G_n(x)} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G_n(x)}\right) dt + \sum_{j=k+1}^{n} r_j \int_{G_n(x)}^{x_j} \left(\frac{1}{G_n(x)} - \frac{1}{t}\right) dt \geq 0,$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \int_{x_j}^{G_n(x)} \frac{1}{t} dt \geq \sum_{j=1}^{n} r_j \int_{x_j}^{G_n(x)} \frac{1}{G_n(x)} dt$$

ou encore :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \left(\ln(G_n(x)) - \ln(x_j)\right) \geq \sum_{j=1}^{n} r_j \frac{G_n(x) - x_j}{G_n(x)}$$

avec :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \frac{G_n(x) - x_j}{G_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} r_j - \frac{1}{G_n(x)} \sum_{j=1}^{n} r_j x_j = 1 - \frac{A_n(x)}{G_n(x)}$$

et :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j \left(\ln(G_n(x)) - \ln(x_j)\right) = \ln(G_n(x)) - \ln\left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{r_j}\right) = 0.$$

On a donc bien $G_n(x) \leq A_n(x)$.

L'égalité est réalisée si, et seulement si, $S = 0$, ce qui équivaut à dire que, pour tout j compris entre 1 et n, on a $\int_{x_j}^{G_n(x)} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G_n(x)}\right) dt = 0$ encore équivalent à $x_j = G_n(x)$.

Cette preuve provient de [1].

2.7.4 Démonstration par densité

On peut aussi procéder par densité comme suit.

À partir de l'inégalité $A'_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq G'_n(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}$, on déduit que pour tout $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{Q}^{+,*})^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} r_k = 1$, on a $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \geq G_n(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k^{r_k}$. Il suffit en effet d'écrire après réduction au même dénominateur, pour tout k compris entre 1 et n, $r_k = \frac{p_k}{m}$ avec p_k, m dans $\mathbb{N}^*$ et de remarquer, en tenant compte de $\sum_{k=1}^{n} p_k = m$, que $A_n(x) = A'_m(y)$, $G_n(x) = G'_m(y)$ où y est tel que ses n_1 premières composantes sont toutes égales à x_1, les n_2 suivantes égales à x_2 et ainsi de suite.

Ensuite pour tout $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^{+,*})^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} r_k = 1$ on peut trouver une suite $\left(s^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $(\mathbb{Q}^{+,*})^n$ qui converge vers r. On a alors $\lim_{j\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} r_k = 1$ et la suite $\left(r^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} s_k^{(j)}} s^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $(\mathbb{Q}^{+,*})^n$ telle que $\sum_{k=1}^{n} r_k^{(j)} = 1$ pour tout entier j et qui converge vers r. Un passage à la limite nous donne alors l'inégalité souhaitée.

Cette méthode ne fournit que l'inégalité large.

Références

[1] H. Alzer. *A proof of the arithmetic mean-geometric mean inequality.* American Mathematical Monthly. (1996).

[2] M. H. Dehon. *Une construction élémentaire de l'exponentielle complexe.* Sur le site http ://www.infty08.net.

[3] G. H. Hardy. *A course of pure Mathematics.* Cambridge University Press (1952).

[4] Hardy, Littlewood, Polya. *Inequalities.* Cambridge Mathematical Library. (1999).

[5] W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in mathematical analysis I.* American Mathematical Society (2001).

[6] D. J. Mercier. *Site Mégamaths : http ://perso.wanadoo.fr/megamaths, rubrique Oral 1.*

[7] J. E. Rombaldi — *Analyse matricielle.* EDP Sciences (2000).