

## Partie I - Cas d'un triangle équilatéral

1. (a) On sait que la courbe considérée est du genre ellipse si et seulement si  $ab - c^2 > 0$ . Ceci impose  $ab > 0$  et en particulier  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ .

Soit alors  $\mathcal{E}$  une ellipse de centre  $O$ . Les abscisses intersection de  $\mathcal{E}$  avec  $(Ox)$  sont les solutions de l'équation  $ax^2 + dx + f = 0$ .

Ces solutions devant être opposées, leur somme à savoir  $-\frac{d}{a}$  est nulle et donc  $d = 0$ . De même, l'étude de  $\mathcal{E} \cap (Oy)$  fournit  $e = 0$ .

(b) Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  puis  $\mathcal{E}$  l'ensemble d'équation  $ax^2 + by^2 + 2cxy + f = 0$ .

$$(I, J, K) \in (\mathcal{E})^3 \Leftrightarrow \begin{cases} a + f = 0 \\ \frac{a + 3b - 3c\sqrt{3}}{4} + f = 0 \\ \frac{a + 3b + 3c\sqrt{3}}{4} + f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -f \\ 3b - 3c\sqrt{3} + 3f = 0 \\ 3b + 3c\sqrt{3} + 3f = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -f \\ b = -f \\ c = 0 \end{cases}.$$

Les éventuelles ellipses contenant  $I$ ,  $J$  et  $K$  ont donc une équation de la forme  $f(x^2 + y^2 - 1) = 0$ ,  $f \neq 0$  ce qui équivaut à  $x^2 + y^2 = 1$ . Ceci assure l'unicité de  $\mathcal{E}$ .

Réciproquement,  $x^2 + y^2 = 1$  est une équation du cercle circonscrit au triangle  $IJK$  qui convient.

2. On note  $\mathcal{A}$  l'aire du triangle  $ABC$ ,  $a$  la longueur d'un côté du triangle  $ABC$  et  $h$  une hauteur. On a  $R = \frac{2h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  et donc

$$\mathcal{A} = \frac{ah}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{3R}{2} \times R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

3. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos(y - x) = \cos x \\ \cos(y - x) = \cos y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \cos x \\ \cos(y - x) = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} y = x + 2k\pi \\ \cos x = 1 \end{cases} \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} / \begin{cases} y = -x + 2k\pi \\ \cos(2x) = \cos(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (2\pi\mathbb{Z})^2 \text{ ou } \exists(k, k') \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} y = -x + 2k\pi \\ 2x = x + 2k'\pi \end{cases} \text{ ou } \exists(k, k') \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} y = -x + 2k\pi \\ 2x = -x + 2k'\pi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (2\pi\mathbb{Z})^2 \exists(k, k') \in \mathbb{Z}^2 / \begin{cases} x = \frac{2k'\pi}{3} \\ y = -\frac{2k'\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système proposé est  $(2\pi\mathbb{Z})^2 \cup \left\{ \left( \frac{2k\pi}{3}, -\frac{2k\pi}{3} + 2k'\pi \right), (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ . Si de plus  $0 < x < y < 2\pi$ , on obtient un couple solution et un seul à savoir  $\left( \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right)$ .

4. (a) i. On note  $\mathcal{A}$  l'aire du triangle  $ABC$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \left| \left[ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} R(\cos \beta - 1) & R(\cos \gamma - 1) \\ R \sin \beta & R \sin \gamma \end{vmatrix} = \frac{R^2}{2} (\sin \gamma \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta - \sin \gamma + \sin \beta) \\ &= \frac{R^2}{2} (\sin(\gamma - \beta) - \sin \gamma + \sin \beta). \end{aligned}$$

ii. Soit  $T = \{(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \beta \leq \gamma \leq 2\pi\}$ .  $T$  est une intersection de trois demi-plans fermés (à savoir  $P_1 = \{(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \beta\}$ ,  $P_2 = \{(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 / \beta \leq \gamma\}$  et  $P_3 = \{(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2 / \gamma \leq 2\pi\}$ ) et donc  $T$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ . De plus  $T$  est borné car  $\forall(\beta, \gamma) \in T$ ,  $\|(\beta, \gamma)\|_\infty \leq 2\pi$ . D'après le théorème de BOREL-LEBESGUE,  $T$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ .

L'application  $f$  est continue sur ce compact à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et donc  $f$  admet sur  $T$  un minimum et un maximum. Le minimum de  $T$  est bien sûr 0 et est atteint en tout point du bord de  $T$  ( quand  $\beta = 0$  ou  $\gamma = 2\pi$  ou  $\beta = \gamma$ ) et puisque  $f$  n'est pas la fonction nulle, le maximum de  $f$  est atteint à l'intérieur de  $T$  c'est-à-dire en un point  $(\beta_0, \gamma_0)$  tel que  $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$ .

iii. La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur l'intérieur de  $T$  qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Donc le point  $(\beta_0, \gamma_0)$  est un point critique de  $f$ . Or, pour  $(\beta, \gamma) \in (\overset{\circ}{T})^2$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \beta}(\beta, \gamma) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \gamma}(\beta, \gamma) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\gamma - \beta) = \cos \beta \\ \cos(\beta - \gamma) = \cos \gamma \end{cases} \Leftrightarrow (\beta, \gamma) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \text{ d'après la question 3.}$$

Donc  $f$  atteint son maximum en un unique point  $(\beta_0, \gamma_0)$  de  $T$  à savoir  $(\beta_0, \gamma_0) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ . Le triangle  $ABC$  correspondant est équilatéral.

(b) D'après la question 2., l'aire maximale d'un triangle inscrit dans  $\mathcal{C}$  est  $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ .

**Reamarque.**  $f(\beta_0, \gamma_0) = \frac{R^2}{2} \left( \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = \frac{3R^2}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ .

L'aire maximale d'un triangle inscrit dans  $\mathcal{C}$  est  $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ .

5.  $\mathcal{A}_C = \pi R^2$  et donc  $\frac{\mathcal{A}_C}{\mathcal{A}_T} \geq \frac{\pi R^2}{\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$  avec égalité si et seulement si  $ABC$  est équilatéral.

6. Soit  $\mathcal{E}$  une ellipse circonscrite au triangle  $\mathcal{T}_0 = IJK$ . Il existe une affinité orthogonale  $f$  transformant  $\mathcal{E}$  en un cercle  $\mathcal{C}$ . L'affinité  $f$  transforme le triangle  $\mathcal{T}_0$  en un triangle  $\mathcal{T} = ABC$  inscrit dans le cercle  $\mathcal{C}$ . Puisqu'une affinité orthogonale conserve les rapports d'aires, on a

$$\frac{\mathcal{A}_E}{\mathcal{A}_{\mathcal{T}_0}} = \frac{\mathcal{A}_C}{\mathcal{A}_T} \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, (*)$$

et donc  $\mathcal{A}_E \geq \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \mathcal{A}_{\mathcal{T}_0} = \pi$  (d'après la question 3.). Maintenant, le cercle  $\mathcal{C}_0$  circonscrit au triangle  $IJK$  est une ellipse circonscrite à ce triangle d'aire  $\pi$  et donc fournissant un cas d'égalité de l'inégalité précédente. Par suite, il existe au moins une ellipse circonscrite au triangle  $IJK$  d'aire minimale à savoir le cercle circonscrit au triangle  $IJK$ .

Maintenant, d'après la question 5., l'inégalité (\*) est une égalité si et seulement si le triangle  $ABC$  est aussi équilatéral. Ceci équivaut au fait que  $f$  est une similitude. Une affinité orthogonale qui est aussi une similitude est une homothétie et donc  $\mathcal{E}$  est nécessairement un cercle, circonscrit au triangle  $IJK$  c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle  $IJK$ . Ceci montre l'unicité de l'ellipse  $\mathcal{E}$ .

## Partie II - Etude de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

1. Soit  $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ . Déjà,  $D$  est une matrice symétrique réelle.

Soient  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (]0, +\infty[)^n$  puis  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Soit  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On a

$${}^tXDX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i x_i^2 = 0$  ce qui équivaut à  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0$ . Donc  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXDX > 0$  ou encore  $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

2. (a) Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . On sait que les valeurs propres de  $A$  sont toutes réelles.

Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  puis  $X$  un vecteur propre associé. Alors

$${}^tXAX = {}^tX(\lambda X) = \lambda \|X\|_2^2.$$

Puisque  $X$  n'est pas nul, on a  $\|X\|_2^2 > 0$  puis  $\lambda = \frac{{}^tXAX}{\|X\|_2^2} > 0$ . On a montré que si  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors toutes les valeurs propres de  $A$  sont des réels strictement positifs.

(b) Le théorème spectral affirme que toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

(c) Soit  $A$  une matrice symétrique réelle dont toutes les valeurs propres sont des réels strictement positifs. Il existe une matrice orthogonale  $P$  et une matrice diagonale réelle  $D$  telle que  $A = {}^tPDP$ . Puisque  $A$  et  $D$  sont semblables, les valeurs propres de  $D$  sont les valeurs propres de  $A$  et sont donc des réels strictement positifs. Pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , d'après la question 1.,

$${}^tXAX = {}^tX{}^tPDPX = {}^t(PX)D(PX) \geq 0.$$

avec égalité si et seulement si  $PX = 0$  ce qui équivaut à  $X = 0$  puisque  $P$  est inversible. Ainsi,  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  ${}^tXAX > 0$  et donc  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**3.** Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . D'après ce qui précède, il existe une matrice diagonale  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  à coefficients réels strictement positifs et une matrice orthogonale  $P$  telles que  $A = {}^tPDP$ . Posons  $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ . Alors  $D = D'^2 = {}^tD'D'$  puis  $A = {}^tP({}^tD')D'P = {}^t(D'P)D'P$ .

Si on pose  $Q = D'P$ , alors  $A = {}^tQQ$ . Enfin,  $\det(A)$  est le produit des valeurs propres de  $A$  et donc  $\det(A) \neq 0$ . Par suite,  $(\det Q)^2 = \det({}^tQQ) = \det(A) \neq 0$  puis  $\det(Q) \neq 0$  et donc  $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ .

Réciproquement, soient  $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  puis  $A = {}^tQQ$ . D'une part,  ${}^tA = {}^tQ{}^t({}^tQ) = {}^tQQ = A$  et donc  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . D'autre part, pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$${}^tXAX = {}^tX{}^tQQX = {}^t(QX)QX = \|QX\|_2^2 \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si  $QX = 0$  ou encore  $X = 0$  car  $Q$  est inversible. Donc  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  ${}^tXAX > 0$  puis  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) / A = {}^tQQ.}$$

**4.** Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Les valeurs propres de  $A$  sont des réels strictement positifs et  $\det(A)$  est le produit de ces valeurs propres. Donc  $\det(A) > 0$ .

La réciproque de ce résultat est fautive. Par exemple, la matrice  $-I_2$  est symétrique réelle de déterminant strictement positif car égal à 1, mais les valeurs propres de  $-I_2$  à savoir  $-1$  et  $-1$  ne sont pas des réels strictement positifs ou encore  $-I_2 \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ .

**5.** Le résultat est acquis si  $k = n$  ou si  $n = 1$ . Soient  $n \geq 2$  puis  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Déjà la matrice  $A_k$  est symétrique. Ensuite, il existe  $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = {}^tQQ$ . On décompose la matrice  $Q$  en blocs :  $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_3 \\ Q_2 & Q_4 \end{pmatrix}$  avec  $Q_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ ,  $Q_2 \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$ ,  $Q_3 \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R})$  et  $Q_4 \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$ .

Alors

$$A = {}^tQQ = \begin{pmatrix} {}^tQ_1 & {}^tQ_2 \\ {}^tQ_3 & {}^tQ_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_3 \\ Q_2 & Q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tQ_1Q_1 + {}^tQ_2Q_2 & \times \\ \times & \times \end{pmatrix},$$

et donc  $A_k = {}^tQ_1Q_1 + {}^tQ_2Q_2$ . Soit  $X_1 \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ .

$${}^tX_1A_kX_1 = {}^tX_1({}^tQ_1Q_1 + {}^tQ_2Q_2)X_1 = {}^t(Q_1X_1)Q_1X_1 + {}^t(Q_2X_1)Q_2X_1 = \|Q_1X_1\|^2 + \|Q_2X_1\|^2 \geq 0$$

avec égalité si et seulement si  $Q_1X_1 = Q_2X_1 = 0$ . Posons alors  $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On a  $QX = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_3 \\ Q_2 & Q_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1X_1 \\ Q_2X_1 \end{pmatrix}$  et donc, puisque  $Q$  est inversible,  $Q_1X_1 = Q_2X_1 = 0 \Leftrightarrow QX = 0 \Leftrightarrow X = 0 \Leftrightarrow X_1 = 0$ .

Ainsi, la matrice  $A_k$  est symétrique définie positive et donc d'après la question 4.,  $\det(A_k) > 0$ .

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A_k) > 0.}$$

**6.** Il existe  $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A_n = {}^tQQ$ . Par suite, puisque la matrice  $A$  est symétrique, la matrice  $A$  s'écrit sous la forme  $A = \begin{pmatrix} {}^tQQ & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix}$  où  $C' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Soit  $C = {}^tQ^{-1}C'$  de sorte que  $C' = {}^tQC$  et  ${}^tC' = {}^tCQ$ . Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^tQ & {}^tQC \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tQQ & {}^tQC \\ {}^tCQ & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {}^tQQ & C' \\ {}^tC' & \alpha \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

**7. (a)** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . En notant  $C_1, \dots, C_{m+1}$  les colonnes de  $M$ , on a

$$\det(M) = \det(C_1, \dots, C_m, C_{m+1}) = \det\left(C_1, \dots, C_m, C_{m+1} - \sum_{k=1}^m \alpha_k C_k\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ \times & \dots & \dots & \times & \alpha - \sum_{k=1}^m \alpha_k^2 \end{vmatrix} = \alpha - \sum_{k=1}^m \alpha_k^2.$$

(b) On suppose que  $\alpha - \sum_{k=1}^m \alpha_k^2 > 0$  ce qui impose en particulier  $\alpha > 0$ .

Soit  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq m+1} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} {}^tXMX &= \sum_{1 \leq i, j \leq m+1} m_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^m x_i^2 + \alpha x_{m+1}^2 + 2 \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i x_{m+1} \\ &= \alpha \left( x_{m+1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right)^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^m x_i^2 \\ &\geq \alpha \left( x_{m+1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right)^2 - \frac{1}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 \right) + \sum_{i=1}^m x_i^2 \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \alpha \left( x_{m+1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i \right)^2 + \frac{\alpha - \sum_{i=1}^m \alpha_i^2}{\alpha} \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 \right) \geq 0, \end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si  $x_{m+1} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0$  et  $\sum_{i=1}^m x_i^2 = 0$  (car  $\frac{\alpha - \sum_{i=1}^m \alpha_i^2}{\alpha} > 0$ ) ou encore si et seulement si  $x_1 = \dots = x_m = x_{m+1} = 0$ . Ainsi,  $\forall X \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  ${}^tXMX > 0$  et  $M \in \mathcal{S}_{m+1}^{++}(\mathbb{R})$ .

8. D'après la question 5., on sait que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $(A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A_k) > 0)$ .

Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A_k) > 0 \Rightarrow A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$ .

• Si  $n = 1$ , soit  $A = (a) \in \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$  telle que  $\forall k \in \llbracket 1, 1 \rrbracket, \det(A_k) > 0$ . Alors  $a = \det(A) = \det(A_1) > 0$ . Mais alors pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  ${}^t(x)A(x) = ax^2 > 0$  et donc  $A \in \mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R})$ .

• Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $(\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A_k) > 0 \Rightarrow A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$ .

Soit  $A \in \mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$  telle que  $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, \det(A_k) > 0$ . En particulier,  $\det(A) = \det(A_{n+1}) > 0$ . D'autre part,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A_k) > 0$  et donc, par hypothèse de récurrence,  $A_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

D'après la question 6., il existe  $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ ,  $C = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que

$$A = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $Q_1 = \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix}$  est orthogonale car  ${}^tQ_1Q_1 = \begin{pmatrix} {}^tQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tQQ & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & 1 \end{pmatrix} =$

$I_{n+1} = Q_1 {}^tQ_1$ . La matrice  $A$  est donc semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}$  et on en déduit que  $\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}\right) =$

$\alpha - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$  (d'après la question 7.a)). Puisque  $\alpha - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = \det(A) > 0$ , la question 7.b) permet d'affirmer que la matrice

$\det\left(\begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}\right)$  est définie positive. Enfin, puisque  $A$  est orthogonalement semblable à la matrice  $\det\left(\begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}\right)$ ,  $A$  est

définie positive (par exemple, les valeurs propres de  $A$  sont les valeurs propres de  $\det\left(\begin{pmatrix} I_n & C \\ {}^tC & \alpha \end{pmatrix}\right)$  et sont donc strictement positives).

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), (\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A_k) > 0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})).$$

9. On munit  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  d'une norme quelconque. Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit l'application  $\varphi_k : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_k(\mathbb{R})$ .

$$A \mapsto A_k$$

Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  $\varphi_k$  est linéaire. Puisque  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace de dimension finie, on en déduit que  $\varphi_k$  est continue sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathcal{S}_k(\mathbb{R})$ . D'autre part, on sait que l'application  $\mathcal{S}_k(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $\mathcal{S}_k(\mathbb{R})$ . Par

$$M \mapsto \det(M)$$

composition, on en déduit que l'application  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Mais alors  $\varphi_k^{-1}(]0, +\infty[)$  est un ouvert de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  en tant qu'image réciproque d'un ouvert de  $\mathbb{R}$  par une application continue.

Maintenant, d'après la question 8.,  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \bigcap_{1 \leq k \leq n} \varphi_k^{-1}(]0, +\infty[)$  et donc  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  en tant qu'intersection d'un nombre fini d'ouverts de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ muni d'une norme.}$$

## Partie III - Inclusion d'un compact dans un ellipsoïde

### III.1 Réduction simultanée

1. •  $\Phi_A$  est une application de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

• Soit  $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ . Puisque  $\Phi_A(X) \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_A(Y, X) = {}^tYAX = {}^t({}^tYAX) = {}^tXAY = \Phi_A(X, Y)$ . Donc  $\Phi_A$  est symétrique.

• Soient  $(X_1, X_2, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^3$  et  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\Phi_A(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = {}^t(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)AY = \lambda_1 {}^tX_1AY + \lambda_2 {}^tX_2AY = \lambda_1 \Phi_A(X_1, Y) + \lambda_2 \Phi_A(X_2, Y).$$

Donc  $\Phi_A$  est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie.

• Pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  $\Phi_A(X, X) = {}^tXAX > 0$ . Donc  $\Phi_A$  est définie positive.

En résumé,  $\Phi_A$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc  $\Phi_A$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

2. Notons  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $P$  et  $(AP)_1, \dots, (AP)_n$  les colonnes de  $AP$ . Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$  de  ${}^tPAP$  est

$${}^tC_i(AP)_j = {}^tC_iAC_j = \Phi_A(C_i, C_j) = \delta_{i,j},$$

qui est également le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$  de la matrice  $I_n$ . Donc  ${}^tPAP = I_n$ .

3.  $\Phi_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . De plus, pour  $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_A(f(X), Y) &= {}^t(f(X))AY = {}^t(A^{-1}BX)AY = {}^tX{}^tB{}^tA^{-1}AY = {}^tXBA^{-1}AY = {}^tXBY = {}^tXAA^{-1}BY \\ &= \Phi_A(X, f(Y)). \end{aligned}$$

Donc  $\Phi_A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , symétrique pour le produit scalaire  $\Phi_A$ .

La matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_0$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est bien sûr  $A^{-1}B$ .

**Remarque.** La matrice  $A^{-1}B$  n'est pas nécessairement symétrique.

4. Puisque  $\Phi_A$  est symétrique pour le produit scalaire  $\Phi_A$ , d'après le théorème spectral, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , orthonormée pour le produit scalaire  $\Phi_A$ , dans laquelle la matrice de  $f$  est une matrice diagonale  $D$ .

Soit  $P$  la matrice carrée dont les colonnes sont les vecteurs de cette base orthonormale.  $P$  est donc la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_0$  à la base  $\mathcal{B}$ . D'après la question 2.,  ${}^tPAP = I_n$  ou encore  $A = {}^tQQ$  où  $Q = P^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ . Maintenant, les formules de changement de bases fournissent  $D = P^{-1}A^{-1}BP = QQ^{-1}{}^tQ^{-1}BQ^{-1} = {}^tQ^{-1}BQ^{-1}$  et donc  $B = {}^tQBQ$ .

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}), \exists D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}) / A = {}^tQQ \text{ et } B = {}^tQDQ.$$

Les coefficients diagonaux de  $D$  sont les valeurs propres de  $A^{-1}B$  qui en particulier sont des réels.

5. (a) Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  tels que  $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$ .

Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $A^{-1}B$  et  $X$  un vecteur propre associé. Alors,  $A^{-1}BX = \lambda X$  puis  $BX = \lambda AX$  puis  ${}^tXBX = \lambda {}^tXAX$ . Maintenant,  $X$  est non nul et donc on en déduit déjà que  ${}^tXAX > 0$  et  ${}^tXBX > 0$  puis  $\lambda = \frac{{}^tXBX}{{}^tXAX} > 0$ . D'autre part,

$$\lambda = \frac{\Phi_B(X)}{\Phi_A(X)} = \Phi_B \left( \frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}} \right).$$

Maintenant,  $\Phi_A \left( \frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}} \right) = \frac{\Phi_A(X)}{\Phi_A(X)} = 1$  et donc  $\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}} \in \mathcal{E}_A$ . Mais alors  $\frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}} \in \mathcal{E}_B$  ou encore  $\lambda = \Phi_B \left( \frac{X}{\sqrt{\Phi_A(X)}} \right) \leq 1$ .

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2, \mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B \Rightarrow \text{Sp}(A^{-1}B) \subset ]0, 1].$$

(b) Si de plus  $\mathcal{E}_B \subset \mathcal{E}_A$ , les valeurs propres de  $B^{-1}A = (A^{-1}B)^{-1}$  sont inférieures ou égales à 1 (et strictement positives). Puisque ces valeurs propres sont les inverses des valeurs propres de  $A^{-1}B$ , les valeurs propres de  $A^{-1}B$  sont aussi supérieures ou égales à 1 et finalement, les valeurs propres de  $A^{-1}B$  sont égales à 1. On en déduit que  $A^{-1}B$  est semblable à  $I_n$  et donc égale à  $I_n$  puis que  $A = B$ .

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))^2, \mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B \Leftrightarrow A = B.$$

### III.2 Convexité

1. Soient  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  deux parties convexes de  $E$ . Si  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \emptyset$ , alors  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  est convexe. Sinon, soient  $(u_1, u_2) \in (\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2)^2$  et  $t \in [0, 1]$ .

$tu_1$  et  $u_2$  sont dans  $\mathcal{C}_1$  et donc  $tu_1 + (1-t)u_2$  est dans  $\mathcal{C}_1$ . De même,  $tu_1 + (1-t)u_2$  est dans  $\mathcal{C}_2$  et finalement  $tu_1 + (1-t)u_2$  est dans  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ .

Dans tous les cas, on a montré que  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$  est convexe.

2. (a) L'application  $\varphi$  est continue sur le compact  $\mathcal{C}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Donc  $\varphi$  admet un minimum et un maximum sur  $\mathcal{C}$ . Supposons que le minimum de  $\varphi$  soit atteint en deux points distincts  $u_1$  et  $u_2$  de  $\mathcal{C}$ . Alors,  $\varphi \left( \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \right) < \frac{1}{2}\varphi(u_1) + \frac{1}{2}\varphi(u_2) = \varphi(u_1)$  ce qui contredit le fait que  $\varphi(u_1)$  est le minimum de  $\varphi$ . Donc  $\varphi$  atteint son minimum en un unique point de  $\mathcal{C}$ .

(b) On a déjà dit que  $\varphi$  admet un maximum.

On note  $D$  le disque unité de  $\mathbb{R}^2$ . L'application  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement convexe sur  $D$  (d'après

$$(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

l'inégalité triangulaire) et  $D$  est un compact convexe de  $\mathbb{R}^2$ . De plus,  $\varphi$  atteint son maximum en tout point du bord de  $D$  et donc en une infinité de points. Il est donc possible qu'une application strictement convexe sur un convexe compact atteigne son maximum en un nombre infini de points.

### III.3 Volume d'un ellipsoïde

1. Déterminons  $k_2$ . On munit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  du produit scalaire canonique de sorte que la base canonique  $\mathcal{B}_0$  de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  est orthormée. Soit  $A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ . On considère l'ellipse (e) d'équation  ${}^tXAX = 1$ . On sait que le théorème spectral permet de réduire la forme quadratique  $X \mapsto {}^tXAX$  en base orthonormée et plus précisément qu'il existe une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  dans laquelle (e) a pour équation  $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 1$  où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de  $A$ .

Maintenant, on sait que « l'aire d'une ellipse » est  $\pi ab$  où  $a$  et  $b$  sont le demi petit axe et le demi grand axe de cette ellipse. Comme  $a$  et  $b$  sont  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ , l'aire de l'ellipse est encore  $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}}$ . Donc  $k_2 = \pi$ .

De même en dimension 3, le volume de l'ellipsoïde d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  en base orthonormée est  $\frac{4\pi}{3}abc$  et donc  $k_3 = \frac{4\pi}{3}$ .

$$k_2 = \pi \text{ et } k_3 = \frac{4\pi}{3}.$$

2. Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  tels que  $\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_B$ . D'après la question III.1.3., les valeurs propres de la matrice  $A^{-1}B$  sont réelles et d'après la question III.1.5.(b), ces valeurs propres sont des réels strictement positifs et inférieurs à 1. Le déterminant de  $A^{-1}B$  qui est le produit de ces valeurs propres est donc inférieur à 1 puis, comme  $\det(A) > 0$  et  $\det(B) > 0$

$$\det(A^{-1}B) \leq 1 \Rightarrow \frac{\det(B)}{\det(A)} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\det(B)}} \Rightarrow v(A) \leq v(B).$$

3. L'application  $d : A \mapsto \det(A)$  est continue sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  à valeurs dans  $]0, +\infty[$  et l'application  $r : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ . Donc, par composition, l'application  $v = r \circ d$  est continue sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

4. (a) Soit  $t \in ]0, 1[$ . Pour  $\lambda \in ]0, +\infty[$ , posons  $\psi(\lambda) = \ln(t + (1-t)\lambda) - (1-t)\ln\lambda$ . Pour tout  $\lambda > 0$ , on a  $t + (1-t)\lambda > 0$  et donc  $\psi$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et de plus, pour  $\lambda > 0$ ,

$$\psi'(\lambda) = \frac{1-t}{t+(1-t)\lambda} - \frac{1-t}{\lambda} = \frac{t(1-t)(\lambda-1)}{t+(1-t)\lambda}.$$

La fonction  $\psi'$  est strictement négative sur  $]0, 1[$  et strictement positive sur  $]1, +\infty[$ . Donc la fonction  $\psi$  admet un minimum local strict en 1 et ce minimum est  $\psi(1) = \ln(t+1-t) - (1-t)\ln(1) = 0$ . Donc la fonction  $\psi$  est strictement positive sur  $]0, +\infty[\setminus\{1\}$  et s'annule en 0 ou encore  $\forall \lambda \in ]0, +\infty[, \ln(t+(1-t)\lambda) \geq (1-t)\ln\lambda$  avec égalité si et seulement si  $\lambda = 1$ .

**Remarque.** On sait que la fonction  $\ln$  est strictement concave sur  $]0, +\infty[$ .

(b) De même, la fonction exponentielle est convexe sur  $\mathbb{R}$  car sa dérivée seconde est positive sur  $\mathbb{R}$  et donc pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et tout  $t \in [0, 1]$ ,  $e^{ta+(1-t)b} \leq te^a + (1-t)e^b$ .

(c) i. Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et soit  $t \in [0, 1]$ . Tout d'abord, on sait que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et en particulier que  $tA + (1-t)B$  est une matrice symétrique réelle. Ensuite, pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$${}^tX(tA + (1-t)B)X = t{}^tXAX + (1-t){}^tXBX \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si  $t{}^tXAX = (1-t){}^tXBX = 0$ . Comme  $t$  et  $1-t$  ne sont pas tous deux nuls, ceci impose  ${}^tXAX = 0$  ou  ${}^tXBX = 0$  et donc  $X = 0$ . Par suite,  $tA + (1-t)B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

$$\boxed{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ est un convexe de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

ii. Soient  $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})^2$  et  $t \in ]0, 1[$ . Avec les notations de la question III.1.4. et en posant  $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ , on a  $\det(A) = \det({}^tQQ) = (\det(Q))^2$  puis  $\det(B) = \det({}^tQDQ) = (\det(Q))^2 \det(D) = (\det(Q))^2 \prod_{i=1}^n \lambda_i$  et enfin

$$\det(tA + (1-t)B) = \det({}^tQ(tI_n + (1-t)D)Q) = (\det(Q))^2 \det(tI_n + (1-t)D) = (\det(Q))^2 \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i).$$

iii. On suppose de plus  $A \neq B$ . Par suite,  $D \neq I_n$  et donc l'un au moins des  $\lambda_i$  n'est pas égal à 1.

D'après la question 4.(a), pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\ln(t + (1-t)\lambda_i) \geq (1-t)\ln\lambda_i$ , l'une au moins de ces inégalités étant stricte.

En additionnant ces inégalités, on obtient  $\sum_{i=1}^n \ln(t + (1-t)\lambda_i) > (1-t) \sum_{i=1}^n \ln\lambda_i$  puis  $-\frac{1}{2} \ln \left( \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i) \right) < -\frac{1}{2} (1-t) \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)$ . En prenant l'exponentielle des deux membres et en utilisant la question 4.(b), on en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i)}} &= \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i) \right) \right) \\ &< \exp \left( -\frac{1}{2} (1-t) \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \right) = \exp \left( t \times 0 + (1-t) \left( -\frac{1}{2} \right) \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \right) \\ &\leq t \exp(0) + (1-t) \exp \left( -\frac{1}{2} \ln \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right) \right) = t + (1-t) \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n \lambda_i}} \end{aligned}$$

En résumé,  $\frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i)}} < t + (1-t) \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n \lambda_i}}$ . On multiplie alors les deux membres de cette inégalité par le réel

strictement positif  $\frac{1}{\det Q}$  et on obtient  $\frac{1}{\sqrt{(\det Q)^2 \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i)}} < \frac{t}{\sqrt{(\det Q)^2}} + (1-t) \frac{1}{\sqrt{(\det Q)^2 \prod_{i=1}^n \lambda_i}}$  ou encore

$\frac{1}{\sqrt{\det(tA + (1-t)B)}} < \frac{t}{\sqrt{\det A}} + \frac{1-t}{\sqrt{\det B}}$  ou enfin  $v(tA + (1-t)B) < tv(A) + (1-t)v(B)$ . On a montré que

la fonction  $v$  est strictement convexe sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

5. Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{E}_A &\Leftrightarrow {}^tXAX \leq 1 \Leftrightarrow {}^t(M^{-1}MX)A(M^{-1}MX) \leq 1 \Leftrightarrow {}^t(MX)({}^tM^{-1}AM^{-1})(MX) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow MX \in \mathcal{E}_B \text{ où } B = {}^tM^{-1}AM^{-1}. \end{aligned}$$

Maintenant,  $B$  est symétrique réelle car  ${}^tB = {}^tM^{-1}{}^tA({}^tM^{-1}) = {}^tM^{-1}AM^{-1} = B$ . De plus, pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$${}^tXBX = {}^tX{}^tM^{-1}AM^{-1}X = {}^t(M^{-1}X)A(M^{-1}X) \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si  $M^{-1}X = 0$  ou encore  $X = 0$ . Donc  $B$  est un élément de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  tel que  $\mathcal{E}_B = M(\mathcal{E}_A)$ . D'après la question III.1.5.(b),  $B$  est unique.

Notons  $V(\mathcal{E})$  le volume d'un ellipsoïde  $\mathcal{E}$ . Alors,

$$V(\mathcal{E}_B) = \frac{k_n}{\sqrt{\det(B)}} = \frac{k_n}{\sqrt{(\det(M^{-1}))^2 \det(A)}} = \det(M) \frac{k_n}{\sqrt{\det(A)}} = \det(M)V(\mathcal{E}_A).$$

### III.4 Inclusion dans un ellipsoïde

1. (a) On note  $N_A$  la norme associée au produit scalaire  $\Phi_A$ . Soient  $(X, Y) \in (\mathcal{E}_A)^2$  et  $t \in [0, 1]$ .

$$\sqrt{{}^t(tX + (1-t)Y)A(tX + (1-t)Y)} = N_A(tX + (1-t)Y) \leq tN_A(X) + (1-t)N_A(Y) \leq t + 1 - t = 1$$

et donc  ${}^t(tX + (1-t)Y)A(tX + (1-t)Y) \leq 1$  ou encore  $tX + (1-t)Y \in \mathcal{E}_A$ .

(b) Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .  $X \in \mathcal{E}_A \Rightarrow {}^tXAX \leq 1 \Rightarrow {}^t(-X)A(-X) \leq 1 \Rightarrow -X \in \mathcal{E}_A$ .

(c) Soit  $X \in B(0, \varepsilon)$ .  $X_0 + X$  est dans  $B(X_0, \varepsilon)$  et donc dans  $\mathcal{E}_A$ . De même,  $-X$  est dans  $B(0, \varepsilon)$  et donc  $X_0 - X$  est dans  $\mathcal{E}_A$ . D'après la question précédente,  $-X_0 + X$  est aussi dans  $\mathcal{E}_A$ . Enfin, puisque  $\mathcal{E}_A$  est convexe,  $\frac{1}{2}(X_0 + X) + \frac{1}{2}(-X_0 + X) = X$  est dans  $\mathcal{E}_A$ . Finalement,

$$B(0, \varepsilon) \subset \mathcal{E}_A.$$

(d) Soient  $\lambda$  une valeur propre de  $A$  et  $X$  un vecteur propre associé. Alors  $X_0 = \frac{\varepsilon X}{\|X\|}$  est dans  $B(0, \varepsilon)$  et donc dans  $\mathcal{E}_A$ .

On en déduit que  $N_A(X_0)^2 \leq 1$ . Maintenant,

$$N_A(X_0)^2 = {}^t\left(\frac{\varepsilon X}{\|X\|}\right)A\left(\frac{\varepsilon X}{\|X\|}\right) = \frac{\varepsilon^2}{\|X\|^2} {}^tXAX = \frac{\varepsilon^2}{\|X\|^2} {}^tX(\lambda X) = \lambda \varepsilon^2.$$

Par suite,  $\lambda \varepsilon^2 \leq 1$  et donc  $\lambda \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$ .

(e) Soit  $\lambda$  la plus grande valeur propre de  $A$ . Puisque les valeurs propres de  $A$  sont positives,  $\lambda^2$  est la plus grande valeur propre de  $A^2$ .

Puisque  $A^2$  est une matrice symétrique, on sait que  $\sup_{X \neq 0} \frac{{}^tXA^2X}{{}^tXX} = \lambda^2$ . Maintenant,  $\sup_{X \neq 0} \frac{{}^tXA^2X}{{}^tXX} = \sup_{X \neq 0} \frac{{}^t(AX)AX}{{}^tXX} = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} = \|A\|^2$ . Donc,  $\|A\| = \lambda \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$ .

2.  $K$  est un compact de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et donc est une partie bornée de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Par suite, il existe un réel  $R > 0$  tel que  $K \subset B(0, R)$ . Maintenant, pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,

$$X \in B(0, R) \Leftrightarrow {}^tXX \leq R^2 \Leftrightarrow {}^tX \frac{1}{R^2} I_n X \leq 1 \Leftrightarrow X \in \mathcal{E} \frac{1}{R^2} I_n \text{ avec } \frac{1}{R^2} I_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

Par suite, il existe au moins un ellipsoïde  $\mathcal{E}$  contenant  $K$ .

3. (a) Soit  $A \in \mathcal{M}$ . Alors  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et donc les valeurs propres de  $A$  sont des réels positifs. De plus,  $\det(A) \geq \det(A_0) > 0$  et donc les valeurs propres de  $A$  sont des réels strictement positifs. Par suite,  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . On a montré que  $\mathcal{M} \subset \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

(b) Soit  $A \in \mathcal{M}$ . Pour  $X \in K$ , on a  $0 \leq {}^tXAX \leq 1$  et donc  $X \in \mathcal{E}_A$ . Par suite,  $A$  est un élément de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  tel que  $K \subset \mathcal{E}_A$ . La question III.4.1.(d) permet d'affirmer que  $\|A\| \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$ . Ainsi,  $\forall A \in \mathcal{M}$ ,  $\|A\| \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$  et donc  $\mathcal{M}$  est une partie bornée de  $\mathcal{M}$ .

(c) • Soit  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite convergente de matrices symétriques positives. On pose  $A = \lim_{p \rightarrow +\infty} A_p$ . Déjà  $A$  est symétrique car  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Ensuite,  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^t X A_p X \geq 0$  et par passage à la limite quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  ${}^t X A X \geq 0$ . Donc  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

Finalement, toute suite convergente d'éléments de  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  converge dans  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et donc  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

• Soit  $F_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \det(A) \geq \det(A_0)\}$ . Alors  $F_1 = \det^{-1}([\det(A_0), +\infty[)$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en tant qu'image réciproque d'un fermé de  $\mathbb{R}$  par une application continue.

• Soit  $F_2 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \forall X \in K, 0 \leq {}^t X A X \leq 1\}$ . Soit  $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite convergente d'éléments de  $F_2$ . Alors  $\forall X \in K$ ,  $0 \leq {}^t X A_p X \leq 1$ . On pose  $A = \lim_{p \rightarrow +\infty} A_p$ . Par passage à la limite quand  $p$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $0 \leq {}^t X A X \leq 1$ .  $F_2$  est donc un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

• Mais alors  $\mathcal{M} = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap F_1 \cap F_2$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(d) D'après la question III.4.1.(a),  $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) / \nu(A) \leq \nu(A_0) \text{ et } \forall X \in K, 0 \leq {}^t X A X \leq 1\}$ . Soient  $(A_1, A_2) \in \mathcal{M}$  et  $t \in [0, 1]$ .

• D'après la question III.3.4.(c).i,  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est convexe et donc  $tA_1 + (1-t)A_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

• D'après la question III.3.4.(c).iii, la fonction  $\nu$  est strictement convexe sur  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et donc  $\nu(tA_1 + (1-t)A_2) \leq t\nu(A_1) + (1-t)\nu(A_2) \leq t\nu(A_0) + (1-t)\nu(A_0) = \nu(A_0)$ .

• Pour  $X \in K$ ,  ${}^t X(tA_1 + (1-t)A_2)X = t{}^t X A_1 X + (1-t){}^t X A_2 X$  et donc  $0 \leq {}^t X(tA_1 + (1-t)A_2)X \leq t + 1 - t = 1$ .

Ainsi,  $\forall (A_1, A_2) \in \mathcal{M}^2, \forall t \in [0, 1], tA_1 + (1-t)A_2 \in \mathcal{M}$  et donc  $\mathcal{M}$  est convexe.

4.  $\mathcal{M}$  est un fermé borné de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et donc un compact de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est de dimension finie. D'autre part,  $\mathcal{M}$  est convexe et la fonction  $\nu$  est strictement convexe sur  $\mathcal{M}$ . D'après la question III.2.(a), la fonction  $\nu$  admet un minimum, atteint en un unique point de  $\mathcal{M}$ . Soit  $A$  l'élément de  $\mathcal{M}$  en lequel ce minimum est atteint.

Soit  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .  $K \subset \mathcal{E}_B \Leftrightarrow \forall X \in K, X \in \mathcal{E}_B \Leftrightarrow \forall X \in K, 0 \leq {}^t X B X \leq 1$ . En particulier,  $\mathcal{E}_A$  est un ellipsoïde contenant  $K$ .

**1er cas.** Si  $0 < \det(B) < \det(A_0)$ , alors  $V(\mathcal{E}_B) = \frac{k_n}{\sqrt{\det(B)}} > \frac{k_n}{\sqrt{\det(A_0)}} \geq \frac{k_n}{\sqrt{\det(A)}} = V(\mathcal{E}_A)$ .

**2ème cas.** Si  $\det(A_0) \leq \det(B)$ , alors  $V(\mathcal{E}_B) = k_n \nu(B) \geq k_n \nu(A) = V(\mathcal{E}_A)$  avec égalité si et seulement si  $B = A$ .

En résumé, il existe un ellipsoïde de volume minimum contenant  $K$  et cet ellipsoïde est unique.

5. (a)  $\overset{\circ}{K} = \emptyset$ .

(b) On munit  $\mathbb{R}^2$  de son repère canonique. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'ellipse  $\mathcal{E}_n$  d'équation  $\frac{x^2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1$  contient  $K$ . Son

aire est  $\frac{\pi}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . Or  $\inf_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\pi}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ . Par suite, s'il existe une ellipse d'aire minimale contenant  $K$ , son aire est nulle ce qui est impossible. Donc il n'existe pas d'ellipse d'aire minimale contenant  $K$ .