

Partie A : une majoration des modules des racines d'un polynôme**1) Exemple numérique**1.1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = x^3 + (-2 + 3i)x^2 + (-3 - 5i)x + 6 - 2i = (x^3 - 2x^2 - 3x + 6) + i(3x^2 - 5x - 2).$$

Par suite, $p(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0 \\ 3x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases}$. L'équation $3x^2 - 5x - 2 = 0$ admet pour solutions $-\frac{1}{3}$ et 2. De plus, $2^3 - 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 6 = 0$ et donc $p(2) = 0$.

1.2) Le discriminant du trinôme $z^2 + 3iz - 3 + i$ est $\Delta = (3i)^2 - 4(-3 + i) = 3 - 4i = (2 - i)^2$ et donc les racines du trinôme $z^2 + 3iz - 3 + i$ sont $z_1 = \frac{-3i + 2 - i}{2} = 1 - 2i$ et $z_2 = \frac{-3i - 2 + i}{2} = -1 - i$.

1.3) Pour tout z dans \mathbb{C} , $p(z) = z^3 + (-2 + 3i)z^2 + (-3 - 5i)z + 6 - 2i = (z - 2)(z^2 + 3iz - 3 + i)$ et donc les racines de p dans \mathbb{C} sont $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -1 - i$ et $z_3 = 2$.

$\max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\} = \max\{\sqrt{40}, 1 + \sqrt{34}, 1 + \sqrt{13}\} = 1 + \sqrt{34} = 6,8\dots$ Ensuite, $|z_1| = \sqrt{5} \leq 1 + \sqrt{34}$, $|z_2| = \sqrt{2} \leq 1 + \sqrt{34}$ et $|z_3| = 2 \leq 1 + \sqrt{34}$. Donc

les racines de p sont dans le disque fermé de centre O et de rayon $R = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\}$.

2) Etude du cas général2.1) 2.1.a) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. L'égalité $AV = \lambda V$ fournit

$$|\lambda v_i| = \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} v_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \right) \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|v_k|) = r_i \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|v_k|).$$

2.1.b) On choisit en particulier pour i un indice i_0 tel que $|v_{i_0}| = \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|v_k|)$. Puisque V est un vecteur propre de A , V n'est pas nul et donc $|v_{i_0}| > 0$. D'après la question précédente,

$$|\lambda v_{i_0}| \leq r_{i_0} \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|v_k|) = r_{i_0} |v_{i_0}|,$$

et donc $|\lambda| \leq r_{i_0}$ après simplification par le réel strictement positif $|v_{i_0}|$. Ainsi, $\lambda \in D_{i_0} \subset \bigcup_{i=1}^n D_i$.

Toute valeur propre de A appartient à $\bigcup_{i=1}^n D_i$.

2.2) 2.2.a) On développe $\det(M_P - zI_n)$ suivant sa dernière colonne. On obtient une écriture de la forme

$$\det(M_P - zI_n) = (-z - a_{n-1})\Delta_{n-1} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} (-a_{n-k})\Delta_k,$$

où les Δ_k , $0 \leq k \leq n-1$, sont des déterminants de format $n-1$.

Plus précisément, $\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} -z & 0 & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \times & -z \end{vmatrix} = (-z)^{n-1}$. Ensuite, pour $0 \leq k \leq n-2$, Δ_k est défini par blocs par

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} -z & 0 & \dots & 0 \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \times & \dots & \times & -z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k-1}(\mathbb{C}).$$

On a donc $\Delta_k = (-z)^{n-k}$. Par suite,

$$\begin{aligned} \det(M_p - zI_n) &= (-z - a_{n-1})(-z)^{n-1} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k-1} (-a_{n-k})(-z)^{n-k} = (-1)^n \left((z + a_{n-1})z^{n-1} + \sum_{k=2}^n a_{n-k}z^{n-k} \right) \\ &= (-1)^n \left(z^n + \sum_{k=1}^n a_{n-k}z^{n-k} \right) = (-1)^n \left(z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right) = (-1)^n P(z). \end{aligned}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \det(M_p - zI_n) = (-1)^n P(z).$$

2.2.b) Ainsi, les racines de P sont encore les valeurs propres de M_p . D'après la question 2.1.b), pour tout λ racine de P dans \mathbb{C} , on a $|\lambda| \leq \max\{r_k, 1 \leq k \leq n\}$. Mais ici, $r_1 = |a_0|$ puis pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $|r_k| = 1 + |a_{k-1}|$. Donc pour tout λ racine de P dans \mathbb{C} , on a $|\lambda| \leq \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, \dots, 1 + |a_{n-1}|\}$.

Partie B : la borne de Cauchy

1) Un résultat préliminaire

1.1) Pour tout $x > 0$, $h(x) = -1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{x^{n-k}}$. Puisque les réels c_k sont positifs et non tous nuls, chaque fonction $x \mapsto \frac{c_k}{x^{n-k}}$, $0 \leq k < n$, est décroissante sur $]0, +\infty[$, l'une au moins de ces fonctions étant strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. La fonction h est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions décroissantes sur $]0, +\infty[$, l'une au moins de ces fonctions étant strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

1.2) Une racine réelle strictement positive du polynôme H est une racine réelle strictement positive de la fonction h et réciproquement.

- Soit $p = \text{Min}\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket / c_k > 0\}$. Alors, $h(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{c_p}{x^{n-p}}$ (car un polynôme non nul est équivalent en 0 à son monôme de plus bas degré). En particulier, $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{x^{n-k}} \right) = -1$.

- Ainsi, la fonction h est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc la fonction h réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h(]0, +\infty[) =]-1, +\infty[$. En particulier, 0 a un antécédent et un seul par la fonction h dans $]0, +\infty[$ ou encore l'équation $h(x) = 0$ admet une solution réelle strictement positive et une seule. Il en est de même de l'équation $H(x) = 0$. On note α cette racine

On a $h'(\alpha) = \frac{H'(\alpha)}{\alpha^n} - \frac{nH(\alpha)}{\alpha^{n+1}} = -\frac{H'(\alpha)}{\alpha^n}$ mais aussi $h'(\alpha) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)c_k}{\alpha^{n-k+1}} < 0$ car l'un au moins des c_k est strictement positif. Donc $H'(\alpha) < 0$ et en particulier, $H'(\alpha) \neq 0$. On sait alors que α est une racine simple de H .

1.3) Puisque $|\zeta| > \alpha$ et que la fonction h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on a $h(|\zeta|) < 0$ puis $H(|\zeta|) > 0$. Ceci fournit $|\zeta|^n > \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k$.

Par contraposition, on en déduit encore que $|\zeta|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k \Rightarrow |\zeta| \leq \alpha$.

1.4) Soit ζ une racine de H dans \mathbb{C} . Alors

$$|\zeta|^n = |\zeta^n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} c_k \zeta^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |c_k \zeta^k| = \sum_{k=0}^{n-1} c_k |\zeta|^k,$$

et d'après la question précédente, on a $|\zeta| \leq \alpha$. Donc les racines de H appartiennent au disque fermé de centre 0 et de rayon α .

2) Une application

2.1) Puisque les nombres a_k , $0 \leq k \leq n-1$, sont tous strictement positifs,

$$\begin{aligned} F_\gamma(X) &= (X-\gamma) \left(\sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \right) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^{k+1} - \gamma \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k = \sum_{k=1}^m a_{k-1} X^k - \gamma \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k \\ &= a_{m-1} X^m + \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k-1} - \gamma a_k) X^k - \gamma a_0 = a_{m-1} \left(X^m - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{a_{m-1}} \left(\gamma - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) X^k - \frac{\gamma a_0}{a_{m-1}} \right) \end{aligned}$$

Le polynôme $\frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma = X^m - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_k}{a_{m-1}} \left(\gamma - \frac{a_{k-1}}{a_k} \right) X^k - \frac{\gamma a_0}{a_{m-1}}$ est donc de la forme $X^m - \sum_{k=0}^{m-1} c_k X^k$ avec $\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$,

$c_k \geq 0$ et de plus $c_0 = \frac{\gamma a_0}{a_{m-1}} > 0$. D'après la question B.1.2), le polynôme $\frac{1}{a_{m-1}} F_\gamma$ admet une racine strictement positive et une seule qui est bien sûr γ .

Il en est de même de F_γ . Maintenant, si ζ est une racine de F dans \mathbb{C} , alors ζ est une racine de F_γ dans \mathbb{C} et, d'après la question B.1.4), on a $|\zeta| \leq \gamma$.

2.2) $F(0) = a_0 \neq 0$. Donc ζ n'est pas nul. Mais alors $\frac{1}{\zeta}$ est racine du polynôme

$$G(X) = X^{m-1} F\left(\frac{1}{X}\right) = a'_{m-1} X^{m-1} + a'_{m-2} X^{m-2} + \dots + a'_1 X + a'_0$$

avec $\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $a'_k = a_{m-1-k}$. D'après la question précédente,

$$\left| \frac{1}{\zeta} \right| \leq \max_{i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket} \left\{ \frac{a'_{i-1}}{a'_i} \right\} = \max_{i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket} \left\{ \frac{a_{m-i}}{a_{m-i-1}} \right\} = \max_{k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket} \left\{ \frac{a_k}{a_{k-1}} \right\} = \frac{1}{\min_{k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket} \left\{ \frac{a_{k-1}}{a_k} \right\}} = \frac{1}{\gamma'},$$

et donc $\gamma' \leq |\zeta|$.

3) La borne de Cauchy

3.1) Puisque $a_n \neq 0$, l'équation proposée est équivalente à l'équation $x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} x^k = 0$. D'après la question B.1.2)

appliquée avec $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $c_k = \frac{|a_k|}{|a_n|}$, cette équation admet une racine réelle strictement positive et une seule (les réels c_k , $0 \leq k \leq n-1$ étant bien tous positifs et non tous nuls).

3.2) Soit ζ une racine de f dans \mathbb{C} , alors $\zeta^n = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \zeta^k$ puis $|\zeta|^n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} |\zeta|^k$. On en déduit avec les notations de la question 1) que $H(|\zeta|) \leq 0$ puis que $h(|\zeta|) \geq 0 = h(\rho(f))$. Puisque la fonction h est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, on a donc $|\zeta| \leq \rho(f)$.

3.3) 3.3.a) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme,

$$(-1)^{n-k} \frac{a_k}{a_n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \dots \zeta_{i_k}$$

Le nombre de termes de cette somme est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments c'est-à-dire $\binom{n}{k}$.

On en déduit que

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |\zeta_{i_1}| |\zeta_{i_2}| \dots |\zeta_{i_k}| \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |\zeta_{i_1}| |\zeta_{i_2}| \dots |\zeta_{i_k}| = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |\zeta_{i_1}|^k = \binom{n}{k} |\zeta_{i_1}|^k.$$

3.3.b) Par définition de $\rho(f)$, $|a_n| \rho(f)^n = \sum_{k=0}^n |a_k| \rho(f)^k$ et donc, d'après la question 3.3.a)

$$\rho(f)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} \rho(f)^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k}.$$

3.3.c) Donc $\rho(f)^n \leq \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho(f)^k |\zeta_n|^{n-k} \right) - \rho(f)^n = (\rho(f) + |\zeta_n|)^n - \rho(f)^n$ puis $2\rho(f)^n \leq (\rho(f) + |\zeta_n|)^n$ puis $\sqrt[n]{2} \rho(f) \leq \rho(f) + |\zeta_n|$ (par croissance de la fonction $t \mapsto \sqrt[n]{t}$ sur \mathbb{R}^+) et finalement

$$\boxed{(\sqrt[n]{2} - 1) \rho(f) \leq |\zeta_n| \leq \rho(f).}$$

3.3.d) Comme à la question 2.2), $g(X) = X^n f\left(\frac{1}{X}\right)$. Comme 0 n'est pas racine de f (ce qui équivaut à $a_0 \neq 0$), un nombre ζ est racine de f si et seulement si $\frac{1}{\zeta}$ est racine de g . Les racines de g sont donc $\frac{1}{\zeta_1}, \dots, \frac{1}{\zeta_n}$ avec $\frac{1}{|\zeta_n|} \leq \dots \leq \frac{1}{|\zeta_1|}$. Mais alors, d'après la question précédente, $(\sqrt[n]{2} - 1) \rho(g) \leq \frac{1}{|\zeta_1|} \leq \rho(g)$. En particulier, $\rho(g) > 0$ et d'autre part, $\sqrt[n]{2} - 1 > 0$ puisque $n \geq 2$. On en déduit que $\frac{1}{\rho(g)} \leq |\zeta_1| \leq \frac{1}{(\sqrt[n]{2} - 1)\rho(g)}$.

3.4) $\rho(p)$ est la solution strictement positive de l'équation $x^3 - \sqrt{13}x^2 - \sqrt{34}x - \sqrt{40}$. On pose $H(X) = X^3 - \sqrt{13}X^2 - \sqrt{34}X - \sqrt{40}$. D'après la question B.1.), pour $x > \rho(p)$, $H(x) > 0$ et pour $x < \rho(p)$, $H(x) < 0$. La calculatrice fournit $H(5) = -0,6\dots < 0$ et $H(5,1) = 2,8\dots > 0$. Donc

$$\boxed{\rho(p) = 5 \text{ à } 10^{-1} \text{ près par défaut.}}$$

Les racines de p sont $\zeta_1 = -1 - i$, $\zeta_2 = 2$ et $\zeta_3 = 1 - 2i$ avec $|\zeta_1| = \sqrt{2}$, $|\zeta_2| = 2$ et $|\zeta_3| = \sqrt{5}$ de sorte que $|\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq |\zeta_3|$. On a bien $|\zeta_3| = \sqrt{5} = 2,2\dots < 5 < \rho(p)$ et $(\sqrt[3]{2} - 1)\rho(p) < (1,3 - 1) \times 5,1 = 1,53 < |\zeta_3|$.

4) Un raffinement de la borne de Cauchy

4.1) Posons $H(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} X^k$ et $H_1(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|a_k|}{|a_n|} X^k$. $\rho(f)$ est l'unique racine réelle strictement positive de H et $\rho(f_1)$ est l'unique racine réelle strictement positive de H_1 . De plus, pour x réel positif, $x \leq \rho(f) \Leftrightarrow H(x) \leq 0$. Or

$$H(\rho(f_1)) = \rho(f_1)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{|a_n|} \rho(f_1)^k = H_1(\rho(f_1)) - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \rho(f_1)^{n-1} = -\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \rho(f_1)^{n-1} \leq 0,$$

et donc

$$\boxed{\rho(f_1) \leq \rho(f).}$$

4.2) $\rho(f_1) > 0$ et $|a_n|\rho(f_1) = \sum_{k=0}^{n-2} |a_k|\rho(f_1)^k$ par définition de $\rho(f_1)$. Ensuite, puisque $|\zeta| > \rho(f_1)$, on a en particulier $\zeta \neq 0$.

$$\begin{aligned} a_n \zeta^n + a_{n-1} \zeta^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} a_k \zeta^k = 0 &\Rightarrow a_{n-1} + a_n \zeta = -\frac{1}{\zeta^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} a_k \zeta^k \Rightarrow |a_{n-1} + a_n \zeta| = \left| \sum_{k=0}^{n-2} \frac{a_k}{\zeta^{n-1-k}} \right| \\ &\Rightarrow |a_{n-1} + a_n \zeta| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|a_k|}{|\zeta|^{n-1-k}} \\ &\Rightarrow |a_{n-1} + a_n \zeta| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|a_k|}{\rho(f_1)^{n-1-k}} \text{ (car } \forall k \in [0, n-2], n-1-k < 0 \text{ et donc} \end{aligned}$$

la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{n-1-k}}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$)

$$\Rightarrow |a_{n-1} + a_n \zeta| \leq \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| \rho(f_1)^k = \frac{1}{\rho(f_1)^{n-1}} \times |a_n| \rho(f_1)^n = |a_n| \rho(f_1).$$

4.3) Mais alors $\left| \zeta + \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \leq \rho(f_1)$ et donc $\zeta \in \mathcal{D}_1$. Ainsi, une racine ζ de f vérifie ou bien $\zeta \in \mathcal{D}_0$, ou bien $\zeta \notin \mathcal{D}_0$ et dans ce cas, $\zeta \in \mathcal{D}_1$. Par suite, toute racine de f est dans $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$.

Partie C : un théorème de Lucas

1) Préliminaires

1.1) \mathcal{P} est un convexe de \mathcal{P} contenant P et donc E n'est pas vide. On en déduit que $\mathcal{E}(P)$ est bien définie.

On sait qu'une intersection de convexes est un convexe. Donc $\mathcal{E}(P)$ est un convexe. Ensuite, chaque élément Γ de E contient P et par suite, $\mathcal{E}(P)$ contient P . Ainsi, $\mathcal{E}(P)$ est un convexe contenant P .

Enfin, si Γ_0 est un convexe contenant P , alors $\mathcal{E}(P) = \bigcap_{\Gamma \in E} \Gamma$ est contenu dans Γ_0 . Donc, $\mathcal{E}(P)$ est la plus petite partie convexe contenant P .

1.2) • Montrons que \mathcal{B} est un convexe contenant P . Tout d'abord, pour chaque $p \in P$, \mathcal{B} contient $\text{bar}\{p(1)\} = p$ et donc $P \subset \mathcal{B}$.

Ensuite, soient A et B deux éléments de \mathcal{B} puis $\lambda \in [0, 1]$. Il existe $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ puis $(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m) \in P^{n+m}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \mu_m) \in [0, 1]^{n+m}$ tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, $\sum_{k=1}^m \mu_k = 1$ et $A = \text{bar}\{A_1(\lambda_1), \dots, A_n(\lambda_n)\}$ et $B = \text{bar}\{B_1(\mu_1), \dots, B_m(\mu_m)\}$. D'après le théorème du barycentre partiel

$$\text{bar}\{A(\lambda), B(1-\lambda)\} = \text{bar}\{A_1(\lambda\lambda_1), \dots, A_n(\lambda\lambda_n), B_1((1-\lambda)\mu_1), \dots, B_m((1-\lambda)\mu_m)\} \in \mathcal{B}.$$

Donc \mathcal{B} est un convexe contenant P et on en déduit que $\mathcal{E}(P) \subset \mathcal{B}$.

• Montrons que $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}(P)$. On doit vérifier pour cela que $\mathcal{E}(P)$ contient les barycentres de familles finies de points de P affectés de coefficients positifs. On montre le résultat par récurrence sur $n \geq 1$ le nombre de points d'une famille finie d'éléments de P .

- $\mathcal{E}(P)$ contient P et donc pour chaque $p \in P$, $\mathcal{E}(P)$ contient $p = \text{bar}\{p(1)\}$. Le résultat est donc vrai quand $n = 1$.

- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{E}(P)$ contienne les barycentres à coefficients positifs de toute famille de n points de P .

Soient A_1, \dots, A_{n+1} $n+1$ points de P puis $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$ tels que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k = 0$ et donc $\text{bar}\{A_1(\lambda_1), \dots, A_{n+1}(\lambda_{n+1})\} = A_{n+1} \in P \subset \mathcal{E}(P)$.

Sinon, $\lambda_{n+1} \in [0, 1[$ et donc $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 - \lambda_{n+1} \in]0, 1]$. Posons $A = \text{bar}\{A_1(\lambda_1), \dots, A_n(\lambda_n)\}$. D'après le théorème du barycentre partiel,

$$\text{bar}\{A_1(\lambda_1), \dots, A_{n+1}(\lambda_{n+1})\} = \text{bar}\{A(1 - \lambda_{n+1}), A_{n+1}(\lambda_{n+1})\}.$$

Maintenant, $A \in \mathcal{E}(P)$ par hypothèse de récurrence et donc $\text{bar}\{A(1 - \lambda_{n+1}), A_{n+1}(\lambda_{n+1})\} \in \mathcal{E}(P)$ car $\mathcal{E}(P)$ est un convexe contenant P . Finalement, $\text{bar}\{A_1(\lambda_1), \dots, A_{n+1}(\lambda_{n+1})\} \in \mathcal{E}(P)$.

Le résultat est démontré par récurrence.

$\mathcal{B} = \mathcal{E}(P).$

2)

2.1) Le polynôme f s'écrit $f = a_n(X - r_1)^{\alpha_1} \dots (X - r_m)^{\alpha_m}$ où les α_j , $1 \leq j \leq m$, sont des entiers naturels non nuls tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n$. Mais alors

$$f' = \sum_{j=1}^m \left(a_n \alpha_j (X - r_j)^{\alpha_j - 1} \prod_{k \neq j} (X - r_k)^{\alpha_k} \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j f}{X - r_j},$$

et donc si $z \in \mathbb{C} \setminus \{r_1, \dots, r_m\}$, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{z - r_j}$.

2.2) On a $f'(r) = 0$ et $f(r) \neq 0$. Par suite,

$$0 = \frac{f'(r)}{f(r)} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{r - r_j} = \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j \overline{(r - r_j)}}{|r - r_j|^2} = \overline{\left(\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) \right)},$$

et donc $\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} (r - r_j) = 0$. On en déduit que

$$r = \frac{\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2} r_j}{\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2}}$$

Ainsi, si pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on pose $\lambda_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{|r - r_j|^2}}$, les nombres λ_k , $1 \leq m$, sont des réels strictement positifs de somme

1 tels que $r = \sum_{k=1}^m \lambda_k r_k$. On a montré que le point d'affixe r est barycentre à coefficients positifs des points M_1, \dots, M_m d'affixes respectives r_1, \dots, r_m .

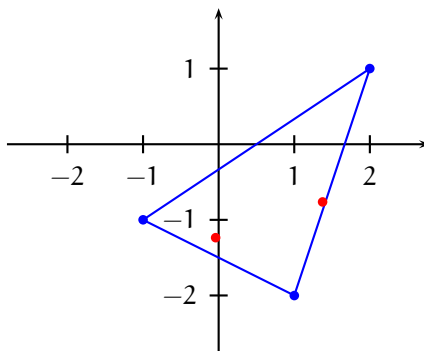
2.3) Ainsi, toute racine de f' qui n'est pas racine de f est dans l'enveloppe convexe des racines de f . Ce résultat persiste bien sûr pour les racines de f' qui sont des racines de f car l'enveloppe convexe des racines de f contient les racines de f . Finalement

les racines de f' sont dans l'enveloppe convexe des racines de f .

2.4) $p' = 3X^2 + 2(-2 + 3i)X - 3 - 5i$. Le discriminant réduit de p' est $\Delta' = (-2 + 3i)^2 - 3(-3 - 5i) = 4 + 3i$. Ensuite, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x + iy)^2 = 4 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + iy \in \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(3 + i) \right\}.$$

Les racines de p' sont $Z_1 = \frac{1}{3} \left(2 - 3i + \frac{1}{\sqrt{2}}(3 + i) \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(-1 + \frac{1}{3\sqrt{2}} \right)$ et $Z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(-1 - \frac{1}{3\sqrt{2}} \right)$. On a représenté ci-dessous ces racines par des points rouges, l'enveloppe convexe des racines de p ayant été représentée en bleu.



Partie D : théorème de Lucas et polynômes de degré 3

1) Etude du cas où $M_1M_2M_3$ est équilatéral

1.1) • Supposons que f' possède une racine double ω . On note Ω le point d'affixe ω . Alors, puisque f est unitaire de degré 3, $f'(X) = 3(X - \omega)^2$ puis il existe un complexe A tel que $f(X) = (X - \omega)^3 - A$. On ne peut avoir $A = 0$ car alors $M_1 = M_2 = M_3$ ce qui n'est pas.

En notant a une racine cubique de A dans \mathbb{C} , on a $a \neq 0$ et

$$f(X) = (X - \omega)^3 - a^3 = (X - \omega - a)(X - \omega - ja)(X - \omega - j^2a) \text{ ou } j = e^{2i\pi/3}.$$

Donc $\{r_1, r_2, r_3\} = \{\omega + a, \omega + ja, \omega + j^2a\}$. Quite à renuméroter les points M_1, M_2 et M_3 , on peut supposer que $r_1 = \omega + a$, $r_2 = \omega + ja$ et $r_3 = \omega + j^2a$. Les points M_1, M_2 et M_3 sont sur le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon $|a|$. De plus,

$$\left(\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega M_2} \right) = \arg \left(\frac{r_2 - \omega}{r_1 - \omega} \right) = \arg(j) = \frac{2\pi}{3} [2\pi],$$

$$\text{et de même } \left(\overrightarrow{\Omega M_2}, \overrightarrow{\Omega M_3} \right) = \left(\overrightarrow{\Omega M_3}, \overrightarrow{\Omega M_1} \right) = \arg(j) = \frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

Donc le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Supposons que le triangle $M_1M_2M_3$ soit équilatéral direct de centre Ω d'affixe ω . Les racines r_1, r_2 et r_3 s'écrivent alors $\omega + a, \omega + ja$ et $\omega + j^2a$, pour un certain complexe $a \neq 0$. Mais alors $f(X) = (X - \omega - a)(X - \omega - ja)(X - \omega - j^2a) = (X - \omega)^3 - a^3$ puis $f'(X) = 3(X - \omega)^2$ et donc f' admet une racine double à savoir ω .

1.2) Si les racines de f forment un triangle équilatéral, $f'(X)$ admet une unique racine ω qui est l'affixe du centre de gravité du triangle et donc aussi centre du cercle inscrit au triangle $M_1M_2M_3$.

2) Une propriété de la tangente à l'ellipse

$$2.1) \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F}) - \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F'}) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F} - \overrightarrow{M(t)F'}) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{F'F}) = \overrightarrow{0} \text{ et donc } \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F}) = \overrightarrow{\tau}(t) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F'}).$$

Remarque. Un vecteur directeur de la tangente en $M(t)$ est normalement le vecteur $\overrightarrow{\tau}(t) = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ et on note que pour tout point O du plan, $\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM(t)}) = \frac{d}{dt} (M(t) - O) = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$.

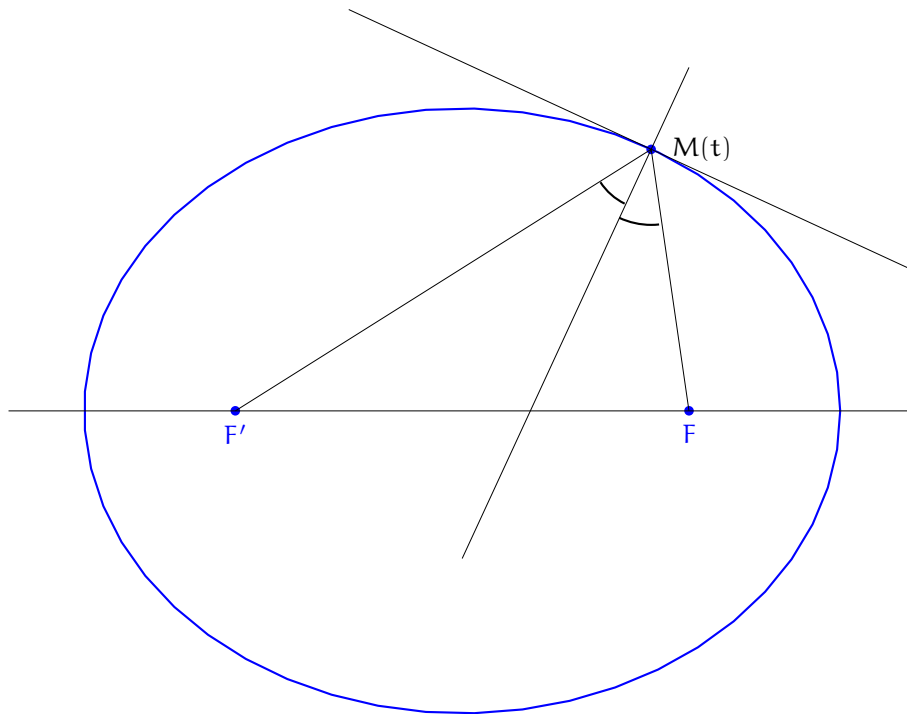
2.2) La fonction $t \mapsto M(t)F + M(t)F'$ est constante. Donc, $\frac{d}{dt} (M(t)F + M(t)F') = 0$.

Maintenant, $\frac{d}{dt} (M(t)F^2) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F}^2) = 2 \frac{d}{dt} (\overrightarrow{M(t)F}) \cdot \overrightarrow{M(t)F} = 2 \overrightarrow{M(t)F} \cdot \overrightarrow{\tau}(t)$. Par suite,

$$\frac{d}{dt} (M(t)F) = \frac{d}{dt} (\sqrt{M(t)F^2}) = \frac{1}{2\sqrt{M(t)F^2}} \frac{d}{dt} (M(t)F^2) = \frac{1}{2M(t)F} 2 \overrightarrow{M(t)F} \cdot \overrightarrow{\tau}(t) = \overrightarrow{u}(t) \cdot \overrightarrow{\tau}(t).$$

De même, $\frac{d}{dt} (M(t)F') = \overrightarrow{v}(t) \cdot \overrightarrow{\tau}(t)$ et finalement $0 = \frac{d}{dt} (M(t)F + M(t)F') = \overrightarrow{u}(t) \cdot \overrightarrow{\tau}(t) + \overrightarrow{v}(t) \cdot \overrightarrow{\tau}(t) = (\overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{v}(t)) \cdot \overrightarrow{\tau}(t)$.

2.3) Le vecteur $-\overrightarrow{u}(t)$ est un vecteur directeur unitaire de la demi-droite $[M(t)F]$ et le vecteur $-\overrightarrow{v}(t)$ est un vecteur directeur unitaire de la demi-droite $[M(t)F']$. Donc le vecteur $-(\overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{v}(t))$ dirige la bissectrice intérieure de l'angle orienté de demi-droites $([M(t)F], [M(t)F'])$ ou encore de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{M(t)F}, \overrightarrow{M(t)F'})$. Le vecteur $\overrightarrow{\tau}(t)$ dirige la tangente en $M(t)$ et ce vecteur est orthogonal au vecteur $-(\overrightarrow{u}(t) + \overrightarrow{v}(t))$. Par suite, la tangente en $M(t)$ est orthogonale à la bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{M(t)F}, \overrightarrow{M(t)F'})$ ou encore la tangente en $M(t)$ est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{M(t)F}, \overrightarrow{M(t)F'})$.



3) Un théorème de Poncelet

3.1) Vérifions que les points F_1 , T_1 et F' sont alignés dans cet ordre ou encore que $(\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_1F'}) = \pi [2\pi]$. Le point T_1 est un point de l'ellipse. Notons \overrightarrow{u} un vecteur directeur de la tangente (PT_1) . On note \overrightarrow{n} un vecteur directeur de la normale à l'ellipse en T_1 .

La tangente en T_1 est bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_1F'})$.

$$\text{Donc } (\overrightarrow{T_1F_1}, \overrightarrow{T_1F'}) = 2 (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{T_1F'}) [2\pi].$$

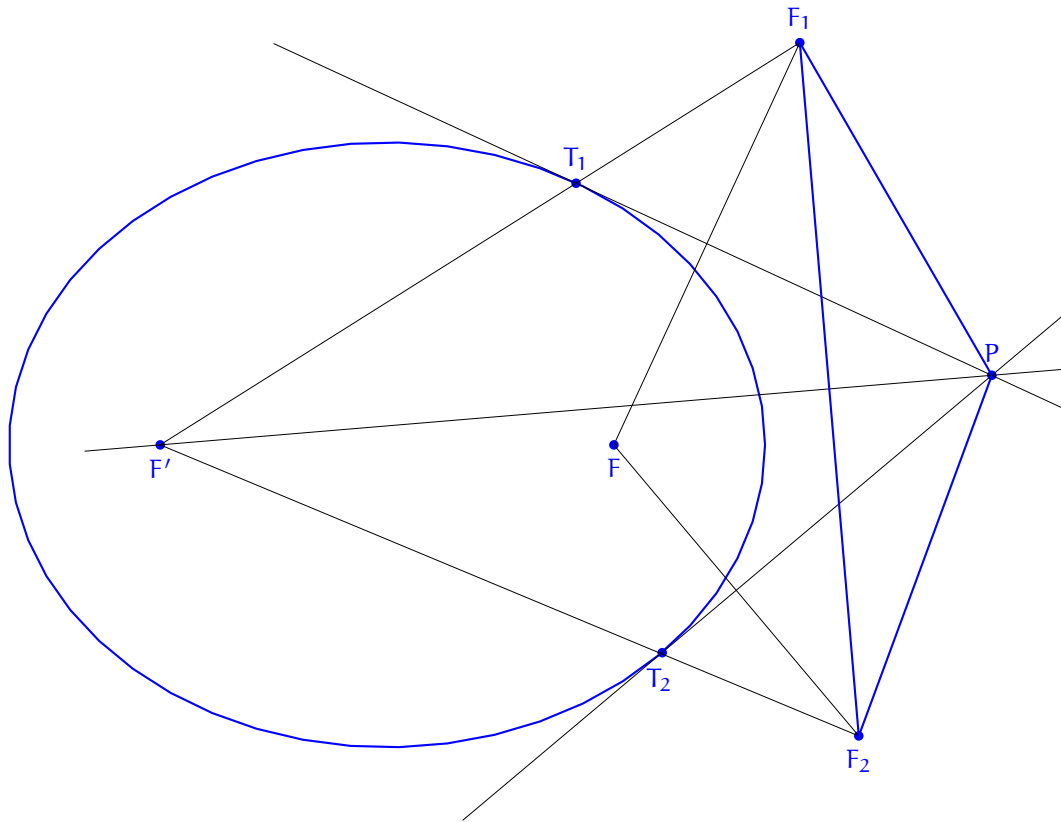
D'après la question précédente, la normale en T_1 est bissectrice intérieure de l'angle $(\overrightarrow{T_1F}, \overrightarrow{T_1F'})$.

$$\text{Donc } (\overrightarrow{T_1F}, \overrightarrow{T_1F'}) = 2 (\overrightarrow{T_1F}, \overrightarrow{n}) [2\pi]. \text{ Par suite,}$$

$$\left(\overrightarrow{T_1 F_1'}, \overrightarrow{T_1 F_1'}\right) = \left(\overrightarrow{T_1 F_1'}, \overrightarrow{T_1 F_1}\right) + \left(\overrightarrow{T_1 F_1}, \overrightarrow{T_1 F_1'}\right) = 2 \left(\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{T_1 F_1}\right) + \left(\overrightarrow{T_1 F_1}, \overrightarrow{n}\right) \right) = 2 \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{n}\right) = \pi [2\pi],$$

(car $2 \times \pm \frac{\pi}{2} \equiv \pi [2\pi]$). Mais alors

$$F_1 F' = F_1 T_1 + T_1 F' = F T_1 + T_1 F' = 2a.$$



3.2) De même, $F'F_2 = 2a$ et donc $F'F_1 = F'F_2 = 2a$. D'autre part, $PF_1 = PF = PF_2$. Donc les points P et F' sont deux points distincts de la médiatrice du segment $[F_1 F_2]$ et finalement la droite (PF') est la médiatrice du segment $[F_1 F_2]$.

3.3) 3.3.a) $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}$ est la rotation de centre P (le point d'intersection des droites (PF) et (PT_1)) et d'angle $2((PT_1), (PF))$.

Maintenant, $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}(F_1) = \mathcal{S}_{(PF)}(F) = F$. Donc $\mathcal{S}_{(PF)} \circ \mathcal{S}_{(PT_1)}$ est aussi la rotation de centre P et d'angle $\left(\overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF}\right)$.

3.3.b) $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$ est la rotation de centre P et d'angle $2((PF'), (PT_2))$.

Mais puisque la droite (PF') est la médiatrice du segment $[F_1 F_2]$, $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}(F_1) = \mathcal{S}_{(PT_2)}(F_2) = F$ et donc $\mathcal{S}_{(PT_2)} \circ \mathcal{S}_{(PF')}$ est aussi la rotation de centre P et d'angle $\left(\overrightarrow{PF_1}, \overrightarrow{PF}\right)$. Finalement, les deux rotations sont égales. Elles ont en particulier même angle. Par suite, $2((PT_1), (PF)) = 2((PF'), (PT_2)) [2\pi]$ puis $((PT_1), (PF)) = ((PF'), (PT_2)) [\pi]$.

On a montré que les angles de droites $((PT_1), (PF))$ et $((PF'), (PT_2))$ sont égaux.

4) Etude du cas où $M_1 M_2 M_3$ n'est pas équilatéral

4.1) Il s'agit de vérifier que le milieu I du segment $[M_1 M_2]$ n'appartient pas au segment $[FF']$. Dans le cas contraire, puisque les points F et F' sont d'un même côté de la droite $(M_1 M_2)$, les points F et F' seraient sur la droite $(M_1 M_2)$. Mais le calcul de la question C.2.2), montre que F et F' sont barycentres à coefficients strictement positifs des points M_1 , M_2 et M_3 et donc n'appartiennent pas à la droite $(M_1 M_2)$ puisque les points M_1 , M_2 et M_3 ne sont pas alignés. On aboutit à une contradiction et donc le milieu I du segment $[M_1 M_2]$ n'appartient pas au segment $[FF']$. Mais alors, il existe une ellipse de foyer F et F' passant par le milieu I du segment $[M_1 M_2]$.

4.2) 4.2.a) D'après la question C.2.1),

$$\begin{aligned} 3(X - w)(X - w') &= f'(X) = f(X) \left(\frac{1}{X - r_1} + \frac{1}{X - r_2} + \frac{1}{X - r_3} \right) \\ &= (X - r_1)(X - r_2) + (X - r_2)(X - r_3) + (X - r_3)(X - r_1). \end{aligned}$$

4.2.b) En évaluant en $\frac{r_1 + r_2}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
3 \left(w - \frac{r_1 + r_2}{2} \right) \left(w' - \frac{r_1 + r_2}{2} \right) &= \left(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_1 \right) \left(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_2 \right) + \left(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_2 \right) \left(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_3 \right) \\
&+ \left(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_3 \right) \left(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_1 \right) \\
&= -\frac{(r_2 - r_1)^2}{4} + \frac{r_1 - r_2}{2} \left(\left(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_3 \right) - \left(\frac{r_1 + r_2}{2} - r_1 \right) \right) = \frac{(r_1 - r_2)(r_2 - r_1)}{4},
\end{aligned}$$

et donc $12 \frac{w - \frac{r_1 + r_2}{2}}{r_1 - r_2} = \frac{r_2 - r_1}{w' - \frac{r_1 + r_2}{2}}$.

En passant aux arguments (et en notant I le milieu de $[M_1M_2]$), on obtient $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{IF}) = (\overrightarrow{IF'}, \overrightarrow{M_2M_1})$ ou encore $(\overrightarrow{IM_2}, \overrightarrow{IF}) = (\overrightarrow{IF'}, \overrightarrow{IM_1})$. Cette dernière égalité signifie que la droite (M_1M_2) est bissectrice extérieure de l'angle $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IF'})$ et donc que la droite (M_1M_2) est tangente à l'ellipse \mathcal{E} en I.

4.3)

4.3.a) En évaluant en r_1 l'égalité de la question 4.2.a), on obtient $3(r_1 - w)(r_1 - w') = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$ et donc $\frac{r_2 - r_1}{w - r_1} = 3 \frac{w' - r_1}{r_3 - r_1}$.

4.3.b) En passant aux arguments, on obtient $(\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1F'}) = (\overrightarrow{M_1F}, \overrightarrow{M_1M_2})$. Par suite, les angles de droites $((M_1M_2), (M_1F))$ et $((M_1M_3), (M_1F'))$ sont les mêmes. D'après la question 3.3), la deuxième tangente issue de M_1 fait avec la droite (M_1F') le même angle que la droite (M_1M_3) fait avec la droite (M_1F') et donc ces droites sont confondues. On a montré que la droite (M_1M_3) est tangente à \mathcal{E} .

4.4) En échangeant les rôles de M_1 et M_3 , on peut aussi considérer une ellipse \mathcal{E}' de foyer F et F' passant par le milieu J du segment $[M_1M_3]$. Alors, la droite (M_1M_3) est tangente à \mathcal{E}' en J et la droite (M_1M_2) est l'autre tangente à \mathcal{E}' issue de M_1 .

D'après la question 3), en notant F_1 le symétrique de F par rapport à la droite (M_1M_2) et F_2 le symétrique de F par rapport à la droite (M_1M_3) , le point de contact de l'ellipse \mathcal{E} avec la droite (M_1M_3) est le point d'intersection de la droite (F_1F_2) et de la droite (M_1M_3) . La question 3) appliqué à l'ellipse \mathcal{E}' montre que ce point d'intersection est le milieu du segment $[M_1M_3]$ et donc l'ellipse \mathcal{E} est tangente au segment $[M_1M_3]$ en son milieu.

Ainsi, les droites (M_1M_2) et (M_1M_3) sont tangentes à l'ellipse \mathcal{E} en les milieux des segments $[M_1M_2]$ et $[M_1M_3]$ respectivement. En échangeant les rôles de M_1 et M_2 , l'ellipse \mathcal{E} qui est tangente au segment $[M_1M_2]$ en son milieu, est aussi tangente au segment $[M_2M_3]$ en son milieu. Finalement, \mathcal{E} est une ellipse de foyers F et F' tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ et les points de contact sont les milieux de ces segments.