CAPES externe 2008 de Mathématiques
Deuxième composition : CORRIGÉ

Alexis GONZÁLEZ & Martial LENZEN
webmaster@capes-de-maths.com

Les mathématiques sont une gymnastique de l'esprit et une préparation à la philosophie – *Isocrate*

Partie A : Une estimation à la Tchebychev

I Une minoration de la fonction π

A.I.1 On considère deux entiers naturels a et b vérifiant $1 \leqslant b \leqslant a$ et l'on pose :

$$I(b,a) = \int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x.$$

A.I.1.a Si $b=1$, alors

$$I(b,a) = I(1,a) = \int_0^1 x^{1-1}(1-x)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)^{a-1}\,\mathrm{d}x,$$

avec $a-1 \geqslant 0$ (en particulier, $a \neq 0$), donc

$$I(1,a) = \left[-\frac{(1-x)^a}{a}\right]_0^1 = -\left(\frac{(1-1)^a}{a} - \frac{(1-0)^a}{a}\right) = \frac{1}{a}.$$

Nous venons d'expliciter $I(1,a)$ en fonction de l'entier a :

$$\boxed{I(1,a) = \frac{1}{a}}.$$

A.I.1.b Supposons que l'on ait l'inégalité stricte $b<a$ (donc $a-b>0$, ou encore $a-b-1 \geqslant 0$). On a alors :

$$I(b+1,a) = \int_0^1 x^{b+1-1}(1-x)^{a-b-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^b(1-x)^{a-b-1}\,\mathrm{d}x.$$

Calculons $I(b+1,a)$ en posant (remarquons que $a-b \neq 0$) :

$$\left\{\begin{array}{l} u(x) = x^b \\ v'(x) = (1-x)^{a-b-1}, \end{array}\right. \qquad \text{d'où} \qquad \left\{\begin{array}{l} u'(x) = b\,x^{b-1} \\ v(x) = -\dfrac{(1-x)^{a-b}}{a-b} \text{ (à une constante près).} \end{array}\right.$$

Ces quatre fonctions étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0,1]$, nous pouvons procéder à l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(b+1,a) &= \int_0^1 u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\,v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^b\left(\frac{-(1-x)^{a-b}}{a-b}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 b\,x^{b-1}\left(\frac{-(1-x)^{a-b}}{a-b}\right)\mathrm{d}x. \\ &= \frac{b}{a-b}\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{b}{a-b}\,I(b,a). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{si } b<a, \text{ alors } I(b+1,a) = \frac{b}{a-b}I(b,a)}.$$

A.I.1.c Utilisons le résultat de la question précédente pour calculer la valeur exacte de $I(b,a)$. Puisque $b-1<b<a$, il vient $a-b+1\neq 0$ et

$$I(b,a)=\frac{b-1}{a-b+1}\,I(b-1,a).$$

De même, $b-2<b<a$, d'où $a-b+2\neq 0$ et

$$I(b-1,a)=\frac{b-2}{a-b+2}\,I(b-2,a).$$

En remplaçant dans l'expression de $I(b,a)$ ci-dessus, on trouve alors

$$I(b,a)=\frac{b-1}{a-b+1}\times\frac{b-2}{a-b+2}\,I(b-2,a).$$

Ensuite, on itère ce raisonnement autant de fois que nécessaire pour obtenir le résultat suivant :

$$\begin{aligned}I(b,a)&=\frac{b-1}{a-b+1}\times\frac{b-2}{a-b+2}\times\cdots\times\frac{1}{a-1}\,I(1,a)\\&=\frac{(b-1)!}{(a-b+1)\times\cdots\times(a-1)\times a}\qquad\text{en effet, d'après A.I.1.a, on a } I(1,a)=\frac{1}{a}.\end{aligned}$$

On rappelle, d'après l'énoncé, que le coefficient binomial $\binom{a}{b}$ est égal à $\frac{a!}{(a-b)!\,b!}$. Observons alors la série d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}&\binom{a}{b}=\frac{1\times\cdots\times(a-b)\times(a-b+1)\times\cdots\times a}{1\times\cdots\times(a-b)\times b\times(b-1)!}\\\Leftrightarrow\quad&\binom{a}{b}=\frac{(a-b+1)\times\cdots\times a}{b\times(b-1)!}\\\Leftrightarrow\quad&b\binom{a}{b}=\frac{(a-b+1)\times\cdots\times a}{(b-1)!}\\\Leftrightarrow\quad&\frac{1}{b\binom{a}{b}}=\frac{(b-1)!}{(a-b+1)\times\cdots\times a}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\text{si } 1\leqslant b<a, \text{ alors } I(b,a)=\frac{1}{b\binom{a}{b}}.$$

Si $b=a$, alors : ◇ d'une part, $I(b,b)=\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{b-b}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{b-1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^b}{b}\right]_0^1=\frac{1}{b}$,

◇ d'autre part, $\frac{1}{b\binom{a}{b}}=\frac{1}{b\binom{b}{b}}=\frac{1}{b}$.

On en conclut que :

$$\boxed{\text{si } 1\leqslant b\leqslant a, \text{ alors } I(b,a)=\frac{1}{b\binom{a}{b}}}.$$

A.I.2 On considère un réel $y \in [0,1[$.

A.I.2.a Appliquons les formules du binôme de Newton. Rappelons que si u et v sont deux nombres réels et n un entier naturel, alors la formule du binôme de Newton s'écrit

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k. \tag{1}$$

En particulier, si $u = 1-x$, $v = xy$ et $n = a-1$, alors :

$$\big((1-x)+(xy)\big)^{a-1} = \sum_{k=0}^{a-1} \binom{a-1}{k} (1-x)^{a-1-k}(xy)^k.$$

Effectuons le changement d'indice $k = i-1$. Il vient :

$$(1-x+xy)^{a-1} = \sum_{i-1=0}^{i-1=a-1} \binom{a-1}{i-1} (1-x)^{a-1-(i-1)}(xy)^{i-1} = \sum_{i=1}^{a} \binom{a-1}{i-1} (1-x)^{a-i}(xy)^{i-1}.$$

Ainsi, i étant une variable « muette » pouvant être remplacée par k, on a :

$$\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} (1-x)^{a-k}(xy)^{k-1}\,\mathrm{d}x.$$

Et, par la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1} \int_0^1 (1-x)^{a-k}x^{k-1}\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, puisque $1 \leqslant k \leqslant a$ et $I(k,a) = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{a-k}\,\mathrm{d}x$, il vient que :

$$\boxed{\text{pour tout nombre réel } y \in [0,1[,\ \int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1}\, I(k,a)}\,.$$

A.I.2.b Observons que $\displaystyle\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \big(1+(y-1)x\big)^{a-1}\,\mathrm{d}x$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{y-1}\,\frac{\big(1+(y-1)x\big)^a}{a}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{a}\,\frac{1}{y-1}\Big(\big(1+(y-1)\times 1\big)^a - \big(1+(y-1)\times 0\big)^a\Big) \\
&= \frac{1}{a}\,\frac{1}{y-1}(y^a - 1^a) = \frac{1}{a}\,\frac{y^a-1}{y-1}.
\end{aligned}$$

On reconnaît la formule de la somme de a termes consécutifs d'une suite géométrique de raison y et de premier terme 1 :

$$\frac{y^a-1}{y-1} = \frac{1-y^a}{1-y} = 1 + y + \cdots + y^{a-1} = \sum_{k=1}^{a} y^{k-1}.$$

On obtient bien la formule demandée :

$$\boxed{\text{pour tout } y \in [0,1[,\ \int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}}\,.$$

A.I.2.c Les résultats des deux questions précédentes nous permettent d'écrire pour tout réel $y \in [0,1[$:

$$\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1}\, I(k,a) = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{a} \binom{a-1}{k-1} y^{k-1}\, I(k,a) - \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1} &= 0\\
\sum_{k=1}^{a} \left[\binom{a-1}{k-1} y^{k-1}\, I(k,a) - \frac{1}{a} y^{k-1}\right] &= 0\\
\sum_{k=1}^{a} \left[\binom{a-1}{k-1} I(k,a) - \frac{1}{a}\right] y^{k-1} &= 0. \qquad \text{(égalité } \bigstar\text{)}
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc considérer le polynôme P à coefficients réels défini pour tout $X \in \mathbb{R}$ par

$$P(X) = \sum_{k=1}^{a} \left[\binom{a-1}{k-1} I(k,a) - \frac{1}{a}\right] X^{k-1}.$$

L'égalité ($\bigstar$) permet d'affirmer que le polynôme P peut se factoriser par $(X-y)$: en effet, y est une racine de P car $P(y)=0$. Rappelons que l'égalité ($\bigstar$) est vraie pour tout $y \in [0,1[$. En fixant l'entier $a \geqslant 1$, le polynôme P admet alors une infinité de racines, ce sont tous les nombres réels y appartenant à $[0,1[$. P ne peut donc être que le polynôme nul. Tous ses coefficients sont donc nuls, ce qui s'écrit :

$$\text{pour tout entier } k \in \{1,\ldots,a\},\ \binom{a-1}{k-1} I(k,a) - \frac{1}{a} = 0,$$

ou encore

$$\text{pour tout entier } k \in \{1,\ldots,a\},\ \binom{a-1}{k-1} I(k,a) = \frac{1}{a}.$$

Par hypothèse, b est un entier vérifiant $1 \leqslant b \leqslant a$. Pour tout entier $b \in \{1,\ldots,a\}$, on a donc :

$$I(b,a) = \frac{1}{a\dbinom{a-1}{b-1}}.$$

Puisque le coefficient binomial $\dbinom{a}{b}$ est égal à $\dfrac{a!}{(a-b)!\,b!}$, il vient :

$$a\binom{a-1}{b-1} = \frac{a(a-1)!}{(a-1-b+1)!\,(b-1)!} = \frac{a!}{(a-b)!\,(b-1)!} = \frac{b\,a!}{b(a-b)!\,(b-1)!} = \frac{b\,a!}{(a-b)!\,b!} = b\binom{a}{b}.$$

Ainsi, pour tout entier $b \in \{1,\ldots,a\}$, on a :

$$\boxed{I(b,a) = \frac{1}{a\dbinom{a-1}{b-1}} = \frac{1}{b\dbinom{a}{b}}}.$$

A.I.3.a On sait que $I(b,a)=\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-b}\,\mathrm{d}x$. Nous allons à nouveau utiliser la formule du binôme de Newton (1) (rappelée page 4) en prenant $u=1$, $v=-x$ et $n=a-b$, de sorte que

$$(1-x)^{a-b}=\sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}1^{a-b-k}(-x)^k=\sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}(-1)^k\,x^k.$$

Ainsi,

$$I(b,a)=\int_0^1\left(x^{b-1}\sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}(-1)^k\,x^k\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}(-1)^k\,x^{k+b-1}\right)\mathrm{d}x.$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient :

$$I(b,a)=\sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}(-1)^k\int_0^1 x^{k+b-1}\,\mathrm{d}x.$$

Or

$$\int_0^1 x^{k+b-1}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{k+b}}{k+b}\right]_0^1=\frac{1^{k+b}}{k+b}-\frac{0^{k+b}}{k+b}=\frac{1}{k+b}.$$

On obtient bien la formule demandée :

$$\boxed{I(b,a)=\sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{1}{k+b}}.$$

A.I.3.b Rappelons que si a et b sont deux entiers tels que $0\leqslant b\leqslant a$, alors le coefficient binomial $\binom{a}{b}$ est le nombre de combinaisons de b éléments d'un ensemble à a éléments. $\binom{a}{b}$ est donc un entier naturel. Ainsi, si $k\in\{0,\dots,a-b\}$, alors tous les coefficients binomiaux $\binom{a-b}{k}$ sont des entiers naturels.

La formule obtenue de $I(b,a)$ à la question précédente permet de voir que $I(b,a)$ est une somme de fractions dont les dénominateurs sont les entiers compris entre b et a. Par hypothèse, pour tout entier $n\geqslant 1$, Δ_n est l'entier égal à $\mathrm{ppcm}(1,2,\dots,n)$. Donc Δ_a est un multiple de tous les nombres entiers compris entre 1 et a. Par définition d'un multiple, pour tout entier $k\in\{0,\dots,a-b\}$ (c'est-à-dire $k+b\in\{b,\dots,a\}\subset\{1,\dots,a\}$), il existe un entier n_k tel que $\Delta_a=(k+b)n_k$. Il s'ensuit que :

$$I(b,a)\Delta_a=\sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{1}{k+b}\Delta_a=\sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}n_k.$$

$I(b,a)\Delta_a$ est la somme de produits d'entiers relatifs, et est donc un entier relatif.

D'après A.I.2.c, on a que

$$I(b,a)=\frac{1}{b\binom{a}{b}}$$

est un nombre positif. En effet, $b\geqslant 1$ par hypothèse et $\binom{a}{b}$ est un nombre positif. De plus, Δ_a étant un plus petit commun multiple, il est nécessairement positif, rendant le produit $I(b,a)\Delta_a$ positif. On peut maintenant conclure que :

$$\boxed{I(b,a)\Delta_a\in\mathbb{N}}.$$

A.I.3.c En reprenant le résultat de la question A.I.2.c, on obtient l'équivalence suivante en multipliant les deux membres de cette égalité par Δ_a :

$$I(b,a) = \frac{1}{b\binom{a}{b}} \quad \Leftrightarrow \quad I(b,a)\Delta_a = \frac{\Delta_a}{b\binom{a}{b}}.$$

Puisque $I(b,a)\Delta_a \in \mathbb{N}$ (d'après la question précédente), il vient $\dfrac{\Delta_a}{b\binom{a}{b}} \in \mathbb{N}$, ou encore

$$\boxed{\text{l'entier } b\binom{a}{b} \text{ divise l'entier } \Delta_a}.$$

A.I.4 Soit $n \geqslant 1$ un entier.

A.I.4.a On nous fait remarquer que pour tout $k \geqslant 1$, l'entier Δ_k divise l'entier Δ_{k+1}.

En effet, soit $k \geqslant 1$ un entier. Par définition, Δ_{k+1} est égal à $\operatorname{ppcm}(1,\ldots,k+1)$, ce qui implique que Δ_{k+1} est multiple de tous les entiers entre 1 et k. De plus, l'entier Δ_k est égal à $\operatorname{ppcm}(1,\ldots,k)$. Autrement dit, Δ_k est le plus petit multiple commun à chacun des entiers entre 1 et k. Il existe donc un entier m_k tel que $\Delta_{k+1} = m_k\Delta_k$. D'où le résultat de l'indication proposée, qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ l'entier } \Delta_n \text{ divise l'entier } \Delta_{n+1}}.$$

Dans la question précédente, nous avons démontré que si a et b sont deux entiers vérifiant $1 \leqslant b \leqslant a$, alors l'entier $b\binom{a}{b}$ divise l'entier Δ_a. En prenant le cas particulier où $a = 2n$ et $b = n$, on a bien $1 \leqslant n \leqslant 2n$ (n'oublions pas que, par hypothèse, $n \geqslant 1$!) et l'entier $b\binom{a}{b} = n\binom{2n}{n}$ divise l'entier Δ_{2n}.

Puisque, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'entier Δ_{2n} divise l'entier Δ_{2n+1}, par lemme,

$$\text{l'entier } n\binom{2n}{n} \text{ divise l'entier } \Delta_{2n+1}.$$

Rappelons à présent le résultat de la question A.I.2.c : si a et b sont deux entiers vérifiant $1 \leqslant b \leqslant a$, alors

$$\frac{1}{b\binom{a}{b}} = \frac{1}{a\binom{a-1}{b-1}}.$$

Il s'ensuit que l'entier $a\binom{a-1}{b-1} = b\binom{a}{b}$ divise l'entier Δ_a. En prenant le cas particulier où $a = 2n+1$ et $b = n+1$, on a bien $1 \leqslant n+1 \leqslant 2n+1$ et

$$\text{l'entier } (2n+1)\binom{2n+1-1}{n+1-1} = (2n+1)\binom{2n}{n} \text{ divise l'entier } \Delta_{2n+1}.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\text{les entiers } n\binom{2n}{n} \text{ et } (2n+1)\binom{2n}{n} \text{ divisent l'entier } \Delta_{2n+1}}.$$

A.I.4.b On nous propose de vérifier que les entiers n et $2n+1$ sont toujours premiers entre eux.

Prenons un diviseur d positif commun aux deux entiers n et $2n+1$. Il existe donc un entier d_1 tel que $n = dd_1$ et un entier d_2 tel que $2n+1 = dd_2$.

Observons que $2n+1-2\times n = 1$, et en remplaçant, on trouve $dd_2 - 2dd_1 = 1$, c'est-à-dire $d(d_2-2d_1) = 1$. Cette égalité permet de dire que l'entier d est un diviseur de 1. Or les seuls diviseurs de 1 sont 1 et -1. Le pgcd de n et $2n+1$ est donc égal à 1 (on a pris $d \geqslant 0$), autrement dit

$$\boxed{\text{les entiers } n \text{ et } 2n+1 \text{ sont toujours premiers entre eux}}.$$

Nous venons de voir dans la question précédente que pour tout entier $n \geqslant 1$, les entiers $n\binom{2n}{n}$ et $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divisent l'entier Δ_{2n+1}.

Il existe donc un entier positif d_3 tel que $\Delta_{2n+1} = d_3\, n\binom{2n}{n}$. Par suite, l'entier $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise l'entier $d_3\, n\binom{2n}{n}$, et en conséquence, l'entier $2n+1$ divise le produit $d_3\, n$.

Rappelons le théorème de Gauss :

Théorème de Gauss :
Soient *a*, *b* et *c* trois entiers positifs.
Si *a* divise *bc*, et si *a* et *b* sont premiers entre eux, alors *a* divise *c*.

n, $2n+1$ et d_3 sont trois entiers positifs. Puisque $2n+1$ divise le produit $d_3\, n$ et que $(2n+1)$ et n sont toujours premiers entre eux, en appliquant le théorème de Gauss, on déduit que l'entier $2n+1$ divise l'entier d_3.

Il existe donc un entier positif d_4 tel que $d_3 = d_4(2n+1)$. En injectant ce résultat dans l'expression de Δ_{2n+1} ci-dessus, on obtient : $\Delta_{2n+1} = n(2n+1)d_4\binom{2n}{n}$.

Cette dernière égalité prouve bien que

$$\boxed{\text{l'entier } n(2n+1)\binom{2n}{n} \text{ divise l'entier } \Delta_{2n+1}}.$$

A.I.4.c k, n et $2n$ sont trois entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant 2n$ et $0 \leqslant n \leqslant 2n$. On a donc :

$$\binom{2n}{k} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!\,k!} \qquad \text{et} \qquad \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(2n-n)!\,n!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}.$$

L'inégalité à démontrer est alors équivalente à

$$\frac{(2n)!}{(2n-k)!\,k!} \leqslant \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Il revient au même de démontrer l'inégalité $(n!)^2 \leqslant (2n-k)!\,k!$.

Étudions les trois cas suivants : $k = n$, $0 \leqslant k < n$ et $n \leqslant k < 2n$.

Cas n° 1 : Supposons que $k = n$. On a alors directement l'égalité :

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{n}.$$

Cas n° 2 : Supposons que l'entier k vérifie $0 \leqslant k < n$. Dans ce cas, on a $k < 2n - n$ ou encore $n < 2n - k$. Remarquons que

$$\frac{n!}{k!} = \frac{1 \times \cdots \times k \times (k+1) \times \cdots \times n}{1 \times \cdots \times k} = (k+1) \times \cdots \times n.$$

Ce produit contient $n - k - 1$ facteurs. Remarquons encore que

$$\frac{(2n-k)!}{n!} = \frac{1 \times \cdots \times n \times (n+1) \times \cdots \times (2n-k)}{1 \times \cdots \times n} = (n+1) \times \cdots \times (2n-k).$$

Ce produit-ci contient $2n - k - n - 1 = n - k - 1$ facteurs également.

Puisque $k < n$, on a successivement les inégalités suivantes :

$$k+1 < n+1 \quad ; \quad k+2 < n+2 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad n < 2n-k.$$

En multipliant tous les termes membre à membre, on obtient l'inégalité

$$(k+1) \times \cdots \times n < (n+1) \times \cdots \times (2n-k),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{n!}{k!} < \frac{(2n-k)!}{n!},$$

ou encore $(n!)^2 < (2n-k)!\, k!$. Nous pouvons donc dire que

$$\text{pour tout entier } k \in \{0, \ldots, n-1\},\ \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

Cas n° 3 : Supposons que l'entier k vérifie $n < k \leqslant 2n$. Dans ce cas, on a que $2n - n < k$, ou encore $0 \leqslant 2n - k < n$. Puisque $2n - k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on peut appliquer le résultat du cas précédent et affirmer l'inégalité

$$\binom{2n}{2n-k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

Or on sait que

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k},$$

de sorte qu'on puisse affirmer que

$$\text{pour tout entier } k \in \{n+1, \ldots, 2n\},\ \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

Ainsi, nous venons de démontrer que

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \in \{0, \ldots, 2n\}, \text{ on a l'inégalité } \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}}.$$

A.I.4.d On nous propose de développer l'égalité $4^n = (1+1)^{2n}$.

En appliquant la formule du binôme de Newton (1) rappelée page 4, en prenant le cas particulier où $u = v = 1$, on obtient :

$$4^n = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^{2n-k}\, 1^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \binom{2n}{0} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

Observons que 4^n est est la somme de $(2n+1)$ coefficients binomiaux. D'après la question précédente, nous pouvons écrire les inégalités suivantes :

$$\binom{2n}{0} \leqslant \binom{2n}{n} \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad \binom{2n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

En sommant membre à membre chacun des termes de ces inégalités, on obtient :

$$\binom{2n}{0} + \cdots + \binom{2n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} + \cdots + \binom{2n}{n}.$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ on a l'inégalité } (2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 4^n}.$$

A.I.4.e Il suffit de reprendre les résultats précédents. En effet, en utilisant l'inégalité démontrée dans la question précédente, nous pouvons écrire l'implication

$$(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 4^n \qquad \Rightarrow \qquad n(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant n4^n.$$

Or nous avons démontré à la question A.I.4.b que l'entier $n(2n+1)\binom{2n}{n})$ divise l'entier Δ_{2n+1}, d'où

$$\Delta_{2n+1} \geqslant n(2n+1)\binom{2n}{n}.$$

On déduit de ces deux inégalités que :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ on a l'inégalité } \Delta_{2n+1} \geqslant n4^n}.$$

A.I.4.f Il convient de distinguer les deux cas où n est un entier pair et n est un entier impair :

Cas n° 1 : supposons que l'entier *n* soit impair. Il peut alors s'écrire $n = 2m+1$, où m est un entier positif ou nul. Dans ce cas, on a : $\Delta_n = \Delta_{2m+1}$ et $\Delta_{2m+1} \geqslant m4^m$ pour $m \geqslant 1$ (d'après la question précédente).

Cherchons alors la valeur de m pour laquelle on a l'inégalité $m4^m \geqslant 2^{2m+1}$: observons que cette inégalité est équivalente à $m, 2^{2m} \geqslant 2^{2m} \times 2$, ou encore $m \geqslant 2$. De plus, si $m \geqslant 2$, alors $n = 2m+1 \geqslant 5$.

Ainsi, si n est un entier impair tel que $n \geqslant 5$, alors $\Delta_n \geqslant 2^n$.

Cas n° 2 : supposons que l'entier n soit pair. Il peut alors s'écrire sous la forme $n = 2m+2$, où m est un entier positif ou nul. Dans ce cas, on a $\Delta_n = \Delta_{2m+2}$. Rappelons que pour tout entier $k \geqslant 1$, l'entier Δ_k divise l'entier Δ_{k+1} (nous l'avons démontré à la question A.I.4.a). Donc, pour tout entier $m \geqslant 0$, l'entier Δ_{2m+1} divise l'entier Δ_{2m+2}, ce qui implique l'inégalité $\Delta_{2m+1} \leqslant \Delta_{2m+2}$. Or $\Delta_{2m+1} \geqslant m4^m$ (d'après la question A.I.4.e). Par suite, $\Delta_{2m+2} \geqslant m4^m$.

Cherchons alors la valeur de m pour laquelle on a l'inégalité $m4^m \geqslant 2^{2m+2}$: observons que cette inégalité est équivalente à $m2^{2m} \geqslant 2^{2m} \times 2^2$, ou encore $m \geqslant 4$. De plus, si $m \geqslant 4$, alors $n = 2m+2 \geqslant 10$.

Ainsi, si n est un entier pair tel que $n \geqslant 10$, alors $\Delta_n \geqslant 2^n$.

On en déduit que pour tout entier $n \geqslant 9$, on a l'inégalité $\Delta_n \geqslant 2^n$. Vérifions encore que cette inégalité est vraie pour $n = 7$ et $n = 8$.

$\boldsymbol{n = 7}$ **:** L'égalité est vérifiée grâce au premier cas ci-dessus (n impair).

$\boldsymbol{n = 8}$ **:** Déterminons $\Delta_8 = \text{ppcm}(1,\dots,8)$. Rappelons que pour le calcul du ppcm de plusieurs nombres, il suffit de trouver leur décomposition en produit de facteurs premiers, puis de calculer le produit de chacun des facteurs premiers élevé à la plus grande des puissances trouvées dans chaque décomposition. Ainsi

$$4 = 2^2 \quad ; \quad 6 = 2 \times 3 \quad \text{et} \quad 8 = 2^3.$$

D'où $\Delta_8 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 = 840$. D'autre part, $2^8 = 256$. L'inégalité est donc bien vérifiée pour $n = 8$, puisque $\Delta_8 = 840 \geqslant 256 = 2^8$.

Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 7, \text{ on a l'inégalité } \Delta_n \geqslant 2^n}.$$

A.I.5 Soit $n \geqslant 1$ un entier.

A.I.5.a On nous propose d'exprimer l'entier $v_p(\Delta_n)$ en fonction des entiers $v_p(1),\dots,v_p(n)$. $v_p(\Delta_n)$ est la valuation p-adique de l'entier Δ_n, il est égal à l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de Δ_n. Étudions différents cas représentant différentes valeurs de n.

$\boldsymbol{n = 1}$ **:**

- D'une part, $v_p(1) = 0$ pour tout nombre premier $p \geqslant 2$,
- D'autre part, $\Delta_1 = \text{ppcm}(1) = 1$, d'où $v_p(\Delta_1) = 0 = v_p(1)$ pour tout nombre premier $p \geqslant 2$.

$\boldsymbol{n = 2}$ **:**

- D'une part, $v_2(2) = 1$ et $v_p(2) = 0$ pour tout nombre premier $p \geqslant 3$,
- D'autre part, $\Delta_2 = \text{ppcm}(1,2) = 2$, d'où $v_2(\Delta_2) = 1 = v_2(2)$ et $v_p(\Delta_2) = 0 = v_p(2)$ pour tout nombre premier $p \geqslant 3$.

$\boldsymbol{n = 3}$ **:**

- D'une part, $v_2(3) = 0$, $v_3(3) = 1$ et $v_p(3) = 0$ pour tout nombre premier $p \geqslant 5$,
- D'autre part, $\Delta_3 = \text{ppcm}(1,2,3) = 2^1 \times 3^1 = 6$, d'où $v_2(\Delta_3) = 1 = v_2(2)$, $v_3(\Delta_3) = 1 = v_3(3)$ et $v_p(\Delta_3) = 0 = v_p(3)$ pour tout nombre premier $p \geqslant 5$.

***n* = 4 :**

- D'une part, $v_2(4) = 2$, et $v_p(4) = 0$ pour tout nombre premier $p \geqslant 3$,
- D'autre part, $\Delta_4 = \text{ppcm}(1,2,3,4) = 2^2 \times 3 = 12$, d'où $v_2(\Delta_4) = 2 = v_2(4)$, $v_3(\Delta_4) = 1 = v_3(3)$ et $v_p(\Delta_4) = 0 = v_p(4)$ pour tout nombre premier $p \geqslant 5$.

En continuant ce raisonnement pour les valeurs suivantes de n, nous aboutissons au résultat suivant : l'entier $v_p(\Delta_n)$ est le plus grand des entiers de l'ensemble $\{v_p(1),\dots,v_p(n)\}$ des valuations p-adiques des entiers respectifs allant de 1 à n. Autrement dit,

$$v_p(\Delta_n) = \max\{v_p(i) \mid i \in \{1,\dots,n\}\}.$$

$v_p(\Delta_n)$ étant un élément de l'ensemble $\{v_p(i) \mid i \in \{1,\dots,n\}\}$, il existe un entier $k \in \{1,\dots,n\}$ tel que $v_p(\Delta_n) = v_p(k)$.

Dans l'énoncé, on nous donne la propriété suivante : pour tout entier $n \geqslant 1$ fixé, la suite $\left(v_p(n)\right)_{p\in\mathscr{P}}$ est nulle à partir d'un certain rang, de sorte que l'on peut écrire

$$n = \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{v_p(n)}.$$

Ici, k est un entier fixé dans $\{1,\dots,n\}$. On peut donc écrire k sous la forme $k = \prod\limits_{p\in\mathscr{P}} p^{v_p(k)}$. Il est clair que

$$p^{v_p(k)} \leqslant \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{v_p(k)} \leqslant n \qquad (\text{car } k \leqslant n).$$

Comme $v_p(k) = v_p(\Delta_n)$, nous pouvons conclure que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ si } p \in \mathscr{P} \text{ alors } p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n}.$$

A.I.5.b Nous utilisons la même propriété admise dans l'énoncé et rappelée quelques lignes plus haut pour déterminer que la décomposition en facteurs premiers de l'entier Δ_n s'écrit :

$$\Delta_n = \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{v_p(\Delta_n)}.$$

On nous demande de montrer que, dans cette décomposition, les seuls nombres premiers p de $\mathscr{P}$ qui interviennent sont tels que $p \leqslant n$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un nombre premier p_1 de $\mathscr{P}$ tel que $p_1 > n \geqslant 1$ et $v_{p_1(\Delta_n)} \geqslant 1$.

Nous avons vu, dans la question précédente, que pour tout nombre premier p dans $\mathscr{P}$, il existe un entier $k \in \{1,\dots,n\}$ tel que $v_p(\Delta_n) = v_p(k)$ et qu'on a l'inégalité

$$k = \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{v_p(k)} \geqslant p^{v_p(k)}.$$

Dans notre cas particulier où $p = p_1$, il existe un entier $k_1 \in \{1,\dots,n\}$ tel que $v_{p_1}(\Delta_n) = v_{p_1}(k_1)$ et qu'on a l'inégalité

$$k_1 = \prod_{p\in\mathscr{P}} p^{v_p(k_1)} \geqslant p_1^{v_{p_1}(k_1)}.$$

Or $v_{p_1}(\Delta_n) \geqslant 1$ (par hypothèse) et $p_1 > 1$. On a donc $p_1^{v_{p_1}(k_1)} \geqslant p_1$, ce qui implique $k_1 \geqslant p_1$. Par hypothèse, nous avons considéré $p_1 > n$, ce qui implique $k_1 > n$!!

Cette inégalité contredit le fait que k_1 est un entier pris dans $\{1,\dots,n\}$. En obtenant une contradiction, nous pouvons considérer que l'hypothèse "$p > n \geqslant 1$" est fausse !

On peut donc en conclure que la décomposition en facteurs premiers de l'entier Δ_n s'écrit plus simplement sous la forme

$$\boxed{\Delta_n = \prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)}}.$$

A.I.5.c Par définition, pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris dans l'ensemble $\{0,\dots,n\}$. Nous avons vu à la question A.I.5.a que si $p \in \mathscr{P}$, alors $p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n$. Nous pouvons donc écrire l'inégalité

$$\prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant \prod_{p \leqslant n} n.$$

Comme $\Delta_n = \prod_{p \leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)}$ (question précédente) et $\prod_{p \leqslant n} n = n^{\pi(n)}$, on peut dire que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ on a l'inégalité } \Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}}.$$

A.I.6.a Reprenons les inégalités démontrées dans les questions A.I.4.f et A.I.5.c :
- pour tout entier $n \geqslant 7$, $\Delta_n \geqslant 2^n$ (question A.I.4.f),
- pour tout entier $n \geqslant 1$, $\Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}$ (question A.I.5.c).

On obtient ainsi la double-inégalité pour tout entier $n \geqslant 7$:

$$2^n \leqslant \Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}.$$

En passant au logarithme népérien dans chaque membre des inégalités, on obtient, pour tout entier $n \geqslant 7$, $\ln(2^n) \leqslant \ln(n^{\pi(n)})$, ou encore

$$n\ln(2) \leqslant \pi(n)\ln(n).$$

Nous pouvons donc conclure que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 7, \text{ on a l'inégalité } \ln(2)\,\frac{n}{\ln(n)} \leqslant \pi(n)}.$$

A.I.6.b Vérifions que l'inégalité ci-dessus est encore vraie pour les entiers $n \in \{3,4,5,6\}$ et fausse pour $n = 2$. Pour cela, appelons (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geqslant 2$ par

$$u_n = \frac{n}{\ln(n)}\,\ln(2).$$

- On a $\pi(2) = 1$ et $u_2 = 2\ln(2)/\ln(2) = 2$. Comme $2 > 1$, il vient $u_2 > \pi(2)$.
- On a $\pi(3) = 2$ et $u_3 = 3\ln(2)/\ln(3) \approx 1,9$ (calculatrice). Comme $1,9 < 2$, il vient $u_3 < \pi(3)$.
- On a $\pi(4) = 2$ et $u_4 = 4\ln(2)/\ln(4) = \frac{4}{2}\frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 2$. Il vient $u_4 = \pi(4)$.
- On a $\pi(5) = 3$ et $u_5 = 5\ln(2)/\ln(5) \approx 2,2$ (calculatrice). Comme $2,2 < 3$, il vient $u_5 < \pi(5)$.
- On a $\pi(6) = 3$ et $u_6 = 6\ln(2)/\ln(6) \approx 2,3$ (calculatrice). Comme $2,3 < 3$, il vient $u_6 < \pi(6)$.

Grâce à ces calculs, nous pouvons affirmer que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 3, \text{ on a l'inégalité } \ln(2)\frac{n}{\ln(n)} \leqslant \pi(n)}.$$

II Une majoration de la fonction π

A.II.1 On cherche dans cette question à majorer le produit $\prod_{p \leqslant n} p$ en fonction de l'entier $n \geqslant 1$.

A.II.1.a Soient a et b deux entiers tels que $0 < \frac{b}{2} \leqslant a < b$. Le produit $\prod_{a<p\leqslant b} p$ contient autant de facteurs qu'il y a de nombres premiers compris dans l'ensemble $\{a+1,\dots,b\}$ et tous les facteurs p sont des nombres premiers. Pour que ce produit divise l'entier $\binom{b}{a}$, il est nécessaire que *tous ses facteurs premiers* divisent l'entier $\binom{b}{a}$. Nous devons alors montrer que pour tout nombre premier p quelconque dans l'ensemble $\{a+1,\dots,b\}$, p divise l'entier $\binom{b}{a}$.

Prenons un nombre premier p quelconque dans l'ensemble $\{a+1,\dots,b\}$ (en supposant qu'il en existe au moins un !). Observons que, par définition du coefficient binomial, on a

$$\binom{b}{a} = \frac{b!}{(b-a)!\,a!} = \frac{1\times\cdots\times a\times(a+1)\times\cdots\times b}{1\times\cdots\times a\times(b-a)!} = \frac{(a+1)\times\cdots\times b}{(b-a)!}.$$

On en tire la relation

$$(b-a)!\binom{b}{a} = (a+1)\times\cdots\times b.$$

$(a+1)\times\cdots\times b$ est le produit de tous les nombres entiers qui se trouvent dans l'ensemble $\{a+1,\dots,b\}$. Parmi ces nombres, on trouve en particulier p. Le nombre p divise donc ce produit, ou encore

$$p \text{ divise le produit } (b-a)!\binom{b}{a}.$$

$(b-a)!$ est le produit de tous les nombres allant de 1 jusqu'à $(b-a)$. Mais, par hypothèse, a et b sont deux entiers tels que $\frac{b}{2} \leqslant a < b$, ce qui donne $b \leqslant 2a < 2b$, ou encore $b-a \leqslant a < 2b-a$. Ainsi, tous les facteurs du produit $(b-a)!$ sont inférieurs à a. Comme $p \in \{a+1,\dots,b\}$, il ne peut diviser aucun de ces facteurs (car $p > a$).

En conséquence, les entiers p et $(b-a)!$ sont premiers entre eux. En appliquant le théorème de Gauss (rappelé page 8), on peut affirmer que p divise l'entier $\binom{b}{a}$, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\text{le produit } \prod_{a<p\leqslant b} p \text{ divise l'entier } \binom{b}{a}}.$$

A.II.1.b Posons $a = m+1$ et $b = 2m+1$, pour tout entier $m \geqslant 1$. Il convient de vérifier que ces deux entiers sont tels que $0 < \frac{b}{2} \leqslant a < b$, afin de pouvoir appliquer le résultat de la question précédente.

Observons que $\dfrac{b}{2} = \dfrac{2m+1}{2} = m + \dfrac{1}{2} > 0$. De plus,

$$m \geqslant 1 \Rightarrow m+m \geqslant m+1 \Rightarrow 2m \geqslant m+1 \Rightarrow 2m+1 > m+1 \Rightarrow b > a.$$

Enfin, il est clair que $m + \dfrac{1}{2} \leqslant m+1$, c'est-à-dire $\dfrac{b}{2} \leqslant a$.

Par application de la question précédente, on conclut que

$$\boxed{\text{pour tout entier } m \geqslant 1, \text{ le produit } \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \text{ divise l'entier } \binom{2m+1}{m+1}}.$$

A.II.1.c Les entiers $2m+1$ et m sont tels que $1 \leqslant m \leqslant 2m+1$. En posant $a = 2m+1$ et $b = m$, le coefficient binomial $\binom{b}{a}$ s'écrit alors :

$$\binom{b}{a} = \binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{(2m+1-m)!\,m!} = \frac{(2m+1)!}{(m+1)!\,m!}.$$

Les entiers $2m+1$ et $m+1$ sont tels que $2 \leqslant m+1 \leqslant 2m+1$. En posant $a = 2m+1$ et $b = m+1$, le coefficient binomial $\binom{b}{a}$ s'écrit alors :

$$\binom{b}{a} = \binom{2m+1}{m+1} = \frac{(2m+1)!}{(2m+1-m-1)!\,(m+1)!} = \frac{(2m+1)!}{m!\,(m+1)!}.$$

Nous pouvons donc conclure que

$$\boxed{\text{pour tout entier } m \geqslant 1, \text{ les entiers } \binom{2m+1}{m} \text{ et } \binom{2m+1}{m+1} \text{ sont égaux}}.$$

A.II.1.d On nous propose de développer la quantité $(1+1)^{2m+1}$.

En appliquant la formule du binôme de Newton (1), rappelée page 4, au cas particulier où $u = v = 1$ et $n = 2m+1$, on peut écrire

$$(1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} 1^{2m+1-k}\, 1^k = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{k}.$$

Nous avons vu à la question précédente que pour tout entier $m \geqslant 1$, on a l'égalité

$$\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}.$$

De plus, on a les égalités de coefficients binomiaux :

$$\binom{2m+1}{0} = \binom{2m+1}{2m+1-0} = \binom{2m+1}{2m+1}$$
$$\binom{2m+1}{1} = \binom{2m+1}{2m+1-1} = \binom{2m+1}{2m}$$
$$\vdots$$
$$\binom{2m+1}{m-1} = \binom{2m+1}{2m+1-m+1} = \binom{2m+1}{m+2}$$

En sommant terme à terme dans chaque égalité, on obtient pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
&\binom{2m+1}{0} + \cdots + \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} + \cdots + \binom{2m+1}{2m+1} \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \Leftrightarrow 2\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \\
\Leftrightarrow\quad & 2\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k} = (1+1)^{2m+1}.
\end{aligned}$$

D'autre part, observons que $(1+1)^{2m+1} = 2^{2m+1} = 2^{2m} \times 2 = 4^m \times 2$. Après simplification par 2, l'égalité précédente s'écrit donc

$$4^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{k}.$$

4^m est la somme de $(m+1)$ coefficients binomiaux tous positifs. Chaque coefficient de cette somme est alors inférieur à 4^m, en particulier celui donné par $k = m$ qui permet de conclure que

$$\boxed{\text{pour tout entier } m \geqslant 1, \text{ on a l'inégalité } \binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m}.$$

A.II.1.e Reprenons le résultat de la question A.II.1.b qui nous amène l'implication suivante, pour tout entier $m \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
& \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \text{ divise l'entier } \binom{2m+1}{m+1} \\
\Rightarrow\quad & \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant \binom{2m+1}{m+1} \overset{\text{A.II.1.c}}{\Rightarrow} \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant \binom{2m+1}{m}.
\end{aligned}$$

La question précédente nous permet alors de conclure que

$$\boxed{\text{pour tout entier } m \geqslant 1, \text{ on a l'inégalité } \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m}.$$

A.II.1.f On nous propose de montrer, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, la propriété $\mathscr{P}_n$: pour tout $k \in \{1,\ldots,2n\}$; on a

$$\prod_{p\leqslant k} p \leqslant 4^k.$$

Initialisation ($n = 1$) : L'entier k appartient alors à $\{1,2\}$.

- Si $k = 1$, alors $\prod_{p\leqslant k} p = \prod_{p\leqslant 1} p = 0$ car il n'y a aucun nombre premier inférieur à 1.
  D'autre part, on a $4^1 = 4$. On a donc bien, dans le cas où $k = 1$, $\prod_{p\leqslant 1} p \leqslant 4^1$.
- Si $k = 2$, alors $\prod_{p\leqslant k} p = \prod_{p\leqslant 1} p = 2$ car le seul nombre premier inférieur à 2 est 2.
  D'autre part, on a $4^2 = 16$. On a donc bien, dans le cas où $k = 2$, $\prod_{p\leqslant 2} p \leqslant 4^2$.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier $m \geqslant 1$ fixé, on ait la propriété $\mathscr{P}_m$. Montrons qu'alors on a la propriété $\mathscr{P}_{m+1}$, c'est-à-dire montrons que

$$\text{pour tout } k \in \{1,\ldots,2m+2\}, \text{ on a } \prod_{p\leqslant k} p \leqslant 4^k.$$

Il s'agit seulement de vérifier que l'inégalité est vraie pour $k \in \{2m+1, 2m+2\}$: en effet, cette inégalité est vraie jusqu'au rang m par hypothèse de récurrence. Observons que $2m+1 = 2(m+1)$ n'est pas un nombre premier, de sorte que

$$\prod_{p\leqslant 2m+1} p = \prod_{p\leqslant 2m+2} p.$$

Il revient donc au même d'étudier les cas $k = 2m+1$ et $k = 2m+2$, et il suffit donc de démontrer l'inégalité

$$\prod_{p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^{2m+1}.$$

On peut écrire ce produit sous la forme

$$\prod_{p\leqslant 2m+1} p = \prod_{p\leqslant m+1} p \times \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p.$$

Si $k = m+1$, on a l'inégalité $\prod_{p\leqslant m+1} p \leqslant 4^{m+1}$ (grâce à l'hypothèse de récurrence).

D'après la question précédente, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a l'inégalité $\prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m$.

Ainsi, en multipliant membre à membre dans les deux dernières inégalités, on obtient

$$\prod_{p\leqslant m+1} p \times \prod_{m+1<p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^{m+1} \times 4^m \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{p\leqslant 2m+1} p \leqslant 4^{2m+1},$$

ce qui est $\mathscr{P}_{m+1}$.

On a $\mathscr{P}_1$ et (pour tout $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$). D'après le principe du raisonnement par récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie à tout rang plus grand que $n = 1$: pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in \{1,\ldots,2n\}$, on a $\prod_{p\leqslant k} p \leqslant 4^n$. On peut en conclure que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ on a l'inégalité } \prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n}.$$

A.II.2.a On nous propose d'utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle.

On a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

C'est la somme d'une série entière à termes strictement positifs. Soit alors $m \geqslant 1$ un entier. Tous les termes de cette somme sont strictement inférieurs à $\exp(x)$, en particulier le terme $x^m / m!$. On a donc,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) > \frac{x^m}{m!} \quad \overset{x=m}{\Rightarrow} \quad \exp(m) > \frac{m^m}{m!}.$$

Il est intéressant de noter que $\exp(m) = \exp(m \times 1) = \big(\exp(1)\big)^m = \mathrm{e}^m$. L'inégalité s'écrit alors

$$\mathrm{e}^m > \frac{m^m}{m!},$$

ou encore, ce qui est désiré,

$$\boxed{\text{pour tout entier } m \geqslant 1, \text{ on a l'inégalité } m! > \left(\frac{m}{\mathrm{e}}\right)^m}.$$

A.II.2.b Soit $n \geqslant 2$ un entier. Vérifions , pour répondre à cette question, que l'on a

$$\pi(n)! \leqslant \prod_{p \leqslant n} p.$$

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers compris dans l'ensemble $\{0, \ldots, n\}$. Notons $p_1, \ldots, p_{\pi(n)}$ les nombres premiers compris dans l'ensemble $\{0, \ldots, n\}$ tels que $p_1 < \cdots < p_{\pi(n)}$ et $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc., de sorte que le produit de l'inégalité à vérifier s'écrive sous la forme

$$\prod_{p \leqslant n} p = p_1 \times \cdots \times p_{\pi(n)}.$$

Nous allons démontrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a l'inégalité $k \leqslant p_k$. Pour cela, procédons par récurrence sur l'entier k en considérant la propriété $\mathscr{P}_k$, définie pour $k \geqslant 1$ par $\mathscr{P}_k : k \leqslant p_k$.

Initialisation ($k = 1$) : Puisque, pour $k = 1$, on a $p_k = p_1 = 2$ et $1 \leqslant 2$, la propriété $\mathscr{P}_k$ est initialisée au rang $k = 1$.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier $m \geqslant 1$ fixé, on ait la propriété $\mathscr{P}_m$. Montrons qu'alors on a la propriété $\mathscr{P}_{m+1}$.

La suite d'entiers (p_i) est strictement croissante : $p_{m+1} - p_m > 0$, ou encore $p_{m+1} - p_m \geqslant 1$, ce qui permet d'écrire l'inégalité $p_{m+1} \geqslant p_m + 1$. De plus, puisque $m + 1 \leqslant p_m + 1$ (par hypothèse de récurrence), on a $m + 1 \leqslant p_{m+1}$, ce qui est $\mathscr{P}_{m+1}$.

On a $\mathscr{P}_1$ et (pour tout $k \geqslant 1$, $\mathscr{P}_k \Rightarrow \mathscr{P}_{k+1}$). D'après le principe du raisonnement par récurrence, la propriété $\mathscr{P}_k$ est vraie à tout rang plus grand que $k = 1$: pour tout $k \geqslant 1$, on a $k \leqslant p_k$.

On en tire alors toutes les inégalités suivantes : $\quad 1 \leqslant p_1\,; \quad \cdots\,; \quad \pi(n) \leqslant p_{\pi(n)}.$

En multipliant membre à membre, on obtient $1\times\cdots\times\pi(n)\leqslant p_1\times\cdots\times p_{\pi(n)}$, qui est l'inégalité recherchée.

Enfin, nous avons vu à la question A.II.1.f que pour tout entier $n\geqslant 1$, $\prod_{p\leqslant n} p\leqslant 4^n$. Il s'ensuit des deux inégalités précédentes que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n\geqslant 2\text{, on a l'inégalité } \pi(n)!\leqslant 4^n}.$$

En prenant le cas particulier où $m=\pi(n)\geqslant 1$ (car $n\geqslant 2$), l'inégalité de la question précédente, valable pour tout entier $m\geqslant 1$, ainsi que le résultat encadré ci-dessus amènent l'encadrement suivant :

$$m!>\left(\frac{m}{\mathrm{e}}\right)^m \quad\Rightarrow\quad 4^n\geqslant\pi(n)!>\left(\frac{\pi(n)}{\mathrm{e}}\right)^{\pi(n)}.$$

En passant au logarithme népérien, l'inégalité devient

$$\begin{aligned}\ln\left[\left(\frac{\pi(n)}{\mathrm{e}}\right)^{\pi(n)}\right]\leqslant\ln(4^n) &\Leftrightarrow \pi(n)\ln\left(\frac{\pi(n)}{\mathrm{e}}\right)\leqslant n\ln(4)\\ &\Leftrightarrow \pi(n)\Big(\ln\big(\pi(n)\big)-\ln(\mathrm{e})\Big)\leqslant n\ln(4).\end{aligned}$$

Puisque $\ln(\mathrm{e})=1$, il vient que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n\geqslant 2\text{, on a l'inégalité } \pi(n)\ln\big(\pi(n)\big)-\pi(n)\leqslant n\ln(4)}.$$

A.II.3 Soit $n\geqslant 3$ un entier. Supposons qu'il existe un entier $n_0\geqslant 3$ tel que

$$\pi(n_0)>\mathrm{e}\,\frac{n_0}{\ln(n_0)}.$$

A.II.3.a On considère la fonction f, définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)-x$. Nous allons d'abord montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$: f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, on a

$$f'(x)=1\ln(x)+x\,\frac{1}{x}-1=\ln(x)+1-1=\ln(x).$$

Or, pour tout réel $x\geqslant 1$, on a que $\ln(x)\geqslant 0$. D'où

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [1,+\infty[}.$$

Nous allons alors vérifier qu'on a l'inégalité : $\dfrac{\mathrm{e}-\ln(4)}{\mathrm{e}}<\dfrac{\ln\big(\ln(n_0)\big)}{\ln(n_0)}$.

On considère la fonction g, définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=x/\ln(x)$. g est dérivable sur $]1,+\infty[$, et, pour tout réel $x>1$, on a

$$g'(x)=\frac{1\ln(x)-x\frac{1}{x}}{[\ln(x)]^2}=\frac{\ln(x)-1}{\big[\ln(x)\big]^2}.$$

Or $\ln(x)-1>0$ lorsque $\ln(x)>1$, c'est-à-dire lorsque $x>\mathrm{e}$. g' étant du signe de $\ln(x)-1$, si $x\in\,]\mathrm{e},+\infty[$, alors $g'(x)>0$ et, par conséquent, g est strictement croissante sur $]\mathrm{e},+\infty[$.

Puisque $n_0\geqslant 3>\mathrm{e}$, on a, par stricte croissance de g sur $]\mathrm{e},+\infty[$,

$$g(n_0)>g(3)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{n_0}{\ln(n_0)}>\frac{3}{\ln(3)}\quad\overset{\mathrm{e}>0}{\Leftrightarrow}\;\mathrm{e}\,\frac{n_0}{\ln(n_0)}>\mathrm{e}\,\frac{3}{\ln(3)}\approx 7,42.$$

Cela implique que le nombre $\mathrm{e}\,n_0/\ln(n_0)$ appartient à l'intervalle $[1,+\infty[$. Par hypothèse, nous avons supposé que

$$\mathrm{e}\,\frac{n_0}{\ln(n_0)}<\pi(n_0).$$

Par stricte croissance de la fonction f sur $[1,+\infty[$, on peut écrire

$$f\left(\mathrm{e}\,\frac{n_0}{\ln(n_0)}\right)<f\big(\pi(n_0)\big)\Leftrightarrow \mathrm{e}\,\frac{n_0}{\ln(n_0)}\ln\left(\mathrm{e}\,\frac{n_0}{\ln(n_0)}\right)-\mathrm{e}\,\frac{n_0}{\ln(n_0)}<\pi(n_0)\ln\big(\pi(n_0)\big)-\pi(n_0)\quad(\bullet).$$

Or, l'inégalité de la question A.II.2.b, vraie pour tout entier $n\geqslant 2$, amène l'implication

$$\pi(n)\ln\big(\pi(n)\big)-\pi(n)\leqslant n\ln(4)\quad\overset{n=n_0}{\Rightarrow}\quad\pi(n_0)\ln\big(\pi(n_0)\big)-\pi(n_0)\leqslant n_0\ln(4).$$

Ainsi, en reprenant l'inégalité $(\bullet)$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}\,\frac{n_0}{\ln(n_0)}\Big(\ln(\mathrm{e})+\ln(n_0)-\ln\big(\ln(n_0)\big)\Big)-\mathrm{e}\,\frac{n_0}{\ln(n_0)}<n_0\ln(4),\\
\overset{n_0\neq 0}{\Leftrightarrow}\quad&\frac{\mathrm{e}}{\ln(n_0)}\Big(1+\ln(n_0)-\ln\big(\ln(n_0)\big)\Big)-\frac{\mathrm{e}}{\ln(n_0)}<\ln(4).\\
\Leftrightarrow\quad&\frac{\mathrm{e}}{\ln(n_0)}+\mathrm{e}\,\frac{\ln(n_0)}{\ln(n_0)}-\mathrm{e}\,\frac{\ln\big(\ln(n_0)\big)}{\ln(n_0)}-\frac{\mathrm{e}}{\ln(n_0)}<\ln(4),\\
\Leftrightarrow\quad&\mathrm{e}-\mathrm{e}\,\frac{\ln\big(\ln(n_0)\big)}{\ln(n_0)}<\ln(4)\quad\Leftrightarrow\quad\mathrm{e}-\ln(4)<\mathrm{e}\,\frac{\ln\big(\ln(n_0)\big)}{\ln(n_0)}.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi l'inégalité demandée :

$$\boxed{\frac{\mathrm{e}-\ln(4)}{\mathrm{e}}<\frac{\ln\big(\ln(n_0)\big)}{\ln(n_0)}}.$$

A.II.3.b On considère la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\ln(x)/x$. h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, on a

$$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\,x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

h' est du signe de $1-\ln(x)$. On a $1-\ln(x)>0$ lorsque $1>\ln(x)$, ou encore lorsque $\mathrm{e}>x$. Ainsi :

$$x\in[1,\mathrm{e}[\,\Rightarrow h'(x)>0,\qquad x=\mathrm{e}\Rightarrow h'(x)=0\quad\text{et}\quad x\in\,]\mathrm{e},+\infty[\,\Rightarrow h'(x)<0.$$

Par suite, h est strictement croissante sur $[1,\mathrm{e}]$ et strictement décroissante sur $[\mathrm{e},+\infty[$. Comme h est continue sur $[1,+\infty[$, elle admet un maximum absolu en $x=\mathrm{e}$. Enfin, comme $h(\mathrm{e})=\ln(\mathrm{e})/\mathrm{e}=1/\mathrm{e}=e^{-1}$, on peut dire que

$$\boxed{h\text{ est majorée par }e^{-1}\text{ sur }[1,+\infty[}.$$

Autrement dit, pour tout réel $x \geqslant 1$, on a $h(x) \leqslant e^{-1}$, et puisque $\ln(n_0) \geqslant 1$, cette inégalité peut s'écrire

$$h(x) \leqslant e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \overset{x=\ln(n_0)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\ln\big(\ln(n_0)\big)}{n_0} \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}},$$

et en utilisant le résultat de la question précédente, on a successivement les inégalités suivantes :

$$\frac{\mathrm{e}-\ln(4)}{\mathrm{e}} < \frac{\ln\big(\ln(n_0)\big)}{n_0} < \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}-\ln(4) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e} < \ln(4)+1.$$

La calculatrice donne $\mathrm{e} \approx 2,72$ et $\ln(4)+1 \approx 2,39$. On obtient donc une inégalité absurde : $2,72 < 2,39$! !

En aboutissant à cette contradiction, on peut dire que l'hypothèse de départ "il existe un entier $n_0 \geqslant 3$ tel que $\pi(n_0) > \mathrm{e}\, n_0 / \ln(n_0)$" est fausse. Par conséquent,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 3, \text{ on a l'inégalité } \pi(n) \leqslant \mathrm{e}\,\frac{n}{\ln(n)}}.$$

On vient d'établir, dans cette partie A achevée, l'encadrement suivant, valable pour tout entier $n \geqslant 3$:

$$\ln(2)\,\frac{n}{\ln(n)} \leqslant \pi(n) \leqslant \mathrm{e}\,\frac{n}{\ln(n)}.$$

Ce genre d'encadrement suggère l'existence d'un lien asymptotique fort entre les suites $\big(\pi(n)\big)_n$ et $\big(\frac{n}{\ln(n)}\big)_n$. La partie B s'intéresse à cette question puisque son objectif principal est de montrer le résultat suivant :

Théorème de Tchebychev :

S'il existe un réel $c > 0$ tel que $\pi(n) \sim c\,\frac{n}{\ln(n)}$, alors nécessairement $c = 1$.

Partie B : Autour d'un théorème de Mertens

I Une formule de Legendre sur la valuation p-adique de n!

On considère un entier $n \geqslant 2$ et un nombre premier p. Pour tout entier $k \geqslant 0$, on considère les sous-ensembles finis U_k, V_k et Ω_k de $\mathbb{N}$ définis par

$$\begin{aligned} U_k &= \{a \in \{1,\dots,n\} \mid p^k \text{ divise } a\}, \\ V_k &= \{a \in \{1,\dots,n\} \mid p^k \text{ ne divise pas } a\}, \\ \Omega_k &= \{a \in \{1,\dots,n\} \mid v_p(a) = k\}. \end{aligned}$$

B.I.1 On considère l'ensemble A des entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que $n < p^k$:

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid n < p^k\}.$$

p étant un nombre premier, on a $p \geqslant 2$ et $\lim_{k\to\infty} (p^k) = +\infty$. Le nombre p^k devient aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang, et on veut qu'il soit plus grand que n. Donc, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un entier $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geqslant p_0$, on ait $p^k > n$. L'ensemble A est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ est minoré par 0. A possède donc un plus petit élément pris dans $\mathbb{N}$, que nous allons noter k_0. Autrement dit,

$$\boxed{\text{il existe un plus petit entier } k_0 \geqslant 0 \text{ tel que } n < p^{k_0}}.$$

Nous allons montrer que k_0 vérifie $k_0 \geqslant 1$. En effet, si $k_0 = 0$, alors $p^{k_0} = p^0 = 1$ (pour tout nombre premier p). Or, par hypothèse, $n \geqslant 2$. Ici, dans ce cas, on aurait $n < 1$, ce qui est contradictoire ! Donc $k_0 \neq 0$, ce qui implique que

$$\boxed{\text{l'entier } k_0 \text{ est tel que } k_0 \geqslant 1}.$$

Nous allons à présent expliciter k_0 en fonction de n et p. k_0 est le plus petit élément de l'ensemble A, il vérifie donc

$$p^{k_0-1} \leqslant n < p^{k_0}.$$

En passant au logarithme népérien dans chaque membre de ces inégalités, on obtient :

$$\ln(p^{k_0-1}) \leqslant \ln(n) < \ln(p^{k_0}) \quad \Leftrightarrow \quad (k_0 - 1)\ln(p) \leqslant \ln(n) < k_0 \ln(p).$$

Or $p \geqslant 2$ implique $\ln(p) > 0$. On peut donc diviser par $\ln(p)$ chaque membre des inégalités précédentes, il vient

$$k_0 - 1 \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(p)} < k_0, \quad \Leftrightarrow \quad k_0 \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(p)} + 1 < k_0 + 1.$$

Dans l'énoncé, on nous rappelle que si x désigne un nombre réel, alors on note $[x]$ sa partie entière, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x ; autrement dit, $[x]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant $[x] \leqslant x < [x] + 1$. D'après les inégalités précédentes, il s'ensuit que

$$\boxed{k_0 \text{ est l'entier } \left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)} + 1\right] = \left[\frac{\ln(n)}{\ln(p)}\right] + 1}.$$

B.I.2.a U_{k+1} est le sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ défini par

$$U_{k+1} = \left\{a \in \{1,\dots,n\} \mid p^{k+1} \text{ divise } a\right\}.$$

Soit a un élément de U_{k+1}. Alors $a \in \{1,\dots,n\}$ et p^{k+1} divise a. Or $p^{k+1} = p^k\,p$. Donc p^k divise a et p divise a. Comme U_k est le sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ défini par $U_k = \left\{a \in \{1,\dots,n\} \mid p^k \text{ divise } a\right\}$, il s'ensuit que $a \in U_k$, de sorte que tout élément de U_{k+1} est un élément de U_k.

Vérifions que l'inclusion $U_{k+1} \subset U_k$ est stricte. Nous venons de voir que k_0 est le plus petit entier tel que $k_0 \geqslant 1$ et $n < p^{k_0}$. Donc, si $k \in \{0,\dots,k_0-1\}$, alors $p^k \leqslant n$, c'est-à-dire l'entier p^k appartient à $\{1,\dots,n\}$. Comme p^k divise p^k, il s'ensuit que si $k \in \{0,\dots,k_0-1\}$, alors $p^k \in U_k$.

Mais $p^k\,p$ ne peut diviser p^k car $p^k\,p > p^k$. Donc, si $k \in \{0,\dots,k_0-1\}$, alors $p^k \not\in U_{k+1}$. On a trouvé un élément de U_k qui n'est pas dans U_{k+1} : $U_k \neq U_{k+1}$:

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \{0,\dots,k_0-1\}, \text{ l'ensemble } U_{k+1} \text{ est strictement inclus dans } U_k}.$$

Montrons maintenant que, pour tout entier $k \geqslant k_0$, $U_k = \varnothing$. Pour cela, supposons $k \geqslant k_0$. Comme k_0 est le plus petit entier tel que $k_0 \geqslant 1$ et $n < p^{k_0}$, il vient que $n < p^{k_0} \leqslant p^k$. p^k étant strictement plus grand que n, il ne peut diviser aucun nombre entier pris dans $\{1,\dots,n\}$. Ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } k \geqslant k_0,\ U_k = \varnothing}.$$

B.I.2.b V_k et V_{k+1} sont les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ définis par :

$$V_k = \left\{a \in \{1,\dots,n\} \mid p^k \text{ ne divise pas } a\right\} \quad \text{et} \quad V_{k+1} = \left\{a \in \{1,\dots,n\} \mid p^{k+1} \text{ ne divise pas } a\right\}.$$

Soit a un élément de V_k, de sorte que $a \in \{1,\dots,n\}$ et p^k ne divise pas a. Il est clair que p^{k+1} ne divise pas a, donc $a \in V_{k+1}$, et tout élément de V_k est un élément de V_{k+1}.

Vérifions que l'inclusion $V_k \subset V_{k+1}$ est stricte : pour cela, il suffit de trouver un élément de V_{k+1} qui ne soit pas dans V_k. Rappelons que l'entier p^k appartient à $\{1,\dots,n\}$ dès que k appartient à $\{0,\dots,k_0-1\}$.

Par conséquent, p^k est divisible par p^k, mais pas par p^{k+1}. Ce qui revient à dire que $p^k \in V_{k+1}$, mais $p^k \not\in V_k$. On a trouvé un élément, p^k, de V_{k+1} qui n'est pas dans V_k, donc $V_k \neq V_{k+1}$:

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \{0,\dots,k_0-1\}, \text{ l'ensemble } V_k \text{ est strictement inclus dans } V_{k+1}}.$$

Montrons qu'alors, pour tout entier $k \geqslant k_0$, on a $V_k = \{1,\dots,n\}$. Nous savons déjà que si $k \geqslant k_0$, alors l'entier p^k ne peut diviser aucun nombre compris entre 1 et n (puisque $n < p^{k_0} \leqslant p^k$). Or, $V_k = \left\{a \in \{1,\dots,n\} \mid p^k \text{ ne divise pas } a\right\}$. Il s'ensuit que

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \geqslant k_0,\ V_k = \{1,\dots,n\}}.$$

B.I.2.c Pour tout entier $k \geqslant 0$, Ω_k est le sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ défini par :

$$\Omega_k = \left\{a \in \{1, \dots, n\} \mid v_p(a) = k\right\}.$$

Rappelons aussi la définition d'une partition d'un ensemble :

Définition (partition d'un ensemble) *: pour un ensemble E quelconque non vide, on dit que* $\{A, 1, \dots, A_n\}$ *est une* partition *de E si on a les conditions suivantes :*
- *aucun des A_i n'est vide : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, A_i est différent de $\varnothing$;*
- *si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sont deux entiers distincts, alors l'intersection de A_i et A_j est vide ;*
- *la réunion de tous les A_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) est exactement E (on remarque que cette dernière condition implique que tous les A_i sont inclus dans E).*

Il s'agit de vérifier les trois conditions précédentes. On suppose que l'entier k appartient à $\{0, \dots, k_0 - 1\}$.

– L'entier p^k appartient à $\{1, \dots, n\}$ dès que k appartient à $\{0, \dots, k_0 - 1\}$. La valuation p-adique est k : $v_p(p^k) = k$. L'entier p^k appartient donc à Ω_k, d'où $\Omega_k \neq \varnothing$. Autrement dit,

aucune des parties $\Omega_k \in \{\Omega_0, \dots, \Omega_{k_0-1}\}$ n'est vide.

– Supposons i et j deux entiers distincts de $\{0, \dots, k_0 - 1\}$. On veut vérifier que $\Omega_i \cap \Omega_k = \varnothing$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe au moins un entier a dans l'intersection $\Omega_i \cap \Omega_k$.

$$a \in \Omega_i \Rightarrow a \in \{1, \dots, n\} \text{ et } v_p(a) = i \qquad \text{et} \qquad a \in \Omega_j \Rightarrow a \in \{1, \dots, n\} \text{ et } v_p(a) = j.$$

Or, la valuation p-adique d'un entier est UNIQUE ! Donc $i = j$, ce qui est contradictoire ! En obtenant cette contradiction, on peut affirmer que l'hypothèse "$\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$" est fausse. Donc

l'intersection $\Omega_i \cap \Omega_j$ de deux éléments de la famille $\{\Omega_0, \dots, \Omega_{k_0-1}\}$ est toujours vide.

– Vérifions que : $\{1, \dots, n\} = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Omega_k$.

Prenons un entier a dans $\{1, \dots, n\}$. La décomposition en facteurs premiers peut s'écrire $a = p^k\, b$, où $k \in \mathbb{N}$, p et b étant deux nombres distincts. Dans ce cas, $v_p(a) = v_p(p^k\, b) = k$.

Observons que $k \leqslant k_0 - 1$. En effet, on raisonne par l'absurde en supposant $k \geqslant k_0$. Comme k_0 est le plus petit entier tel que $k_0 \geqslant 1$ et $n < p^{k_0}$, il vient que $n < p^{k_0} \leqslant p^k < p^k\, b$, soit $n < a$, ce qui est contradictoire puisque $a \in \{1, \dots, n\}$ implique $a \leqslant n$. En obtenant cette contradiction, on peut affirmer que l'hypothèse "$k \geqslant k_0$" est fausse !

Et donc, $v_p(a) = k$ avec $k \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$, ce qui signifie qu'il existe alors un entier $k \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$ tel que $a \in \Omega_k$, de sorte que tout élément de $\{1, \dots, n\}$ est un élément de la réunion $\bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Omega_k$:

$$\{1, \dots, n\} \subset \bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Omega_k.$$

Montrons l'inclusion réciproque. Prenons un entier a dans $\bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Omega_k$. Pour tout $k \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$, $a \in \Omega_k$ et par définition de Ω_k, $a \in \{1, \dots, n\}$, de sorte que tout élément de la réunion $\bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Omega_k$ est un élément de $\{1, \dots, n\}$:

$$\{1, \dots, n\} \supset \bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Omega_k.$$

On en déduit donc que la réunion de tous les Ω_k est exactement $\{1,\ldots,n\}$:

$$\bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Omega_k = \{1,\ldots,n\}.$$

Les trois conditions de la définition étant vérifiées,

$$\boxed{\text{la famille des parties } \{\Omega_0,\ldots,\Omega_{k_0-1}\} \text{ forme une partition de l'ensemble } \{1,\ldots,n\}}.$$

B.I.3.a Soit $k \geqslant 0$. Prenons un entier a dans Ω_k. Par définition de Ω_k, on a : $a \in \{1,\ldots,n\}$ et $v_p(a) = k$. On admet, dans l'énoncé, que $v_p(n)$ est l'entier k tel que p^k divise n et p^{k+1} ne divise pas n. Dans notre cas, $v_p(a)$ est l'entier k tel que p^k divise a et p^{k+1} ne divise pas a. Par conséquent, $a \in U_k \cap V_{k+1}$. Tout élément de Ω_k est un élément de $U_k \cap V_{k+1}$: $\Omega_k \subset U_k \cap V_{k+1}$.

L'inclusion réciproque se démontre de manière équivalente en reprenant cette démonstration à l'envers. Ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \geqslant 0, \text{ on a l'égalité } \Omega_k = U_k \cap V_{k+1}}.$$

B.I.3.b Rappelons que si E désigne un ensemble fini, alors on note $\sharp E$ le cardinal de cet ensemble, c'est-à-dire le nombre d'éléments de E. Soit $k \geqslant 0$ un entier.

Déterminons $\sharp U_k$: Si a est un entier pris dans U_k, alors $a \in \{1,\ldots,n\}$ et p^k divise a. Il existe un entier $b \geqslant 1$ tel que $a = p^k\, b$. Ainsi $1 \leqslant p^k\, b \leqslant n$, ce qui implque les inégalités

$$1 \leqslant b \leqslant \frac{n}{p^k}.$$

Il y a autant d'entiers a dans U_k qu'il y a d'entiers b dans l'intervalle $\left[1, n/p^k\right]$: on compte $\left[n/p^k\right]$ entiers dans cet intervalle, où $\left[n/p^k\right]$ désigne la partie entière du nombre réel n/p^k. On a ainsi exprimé $\sharp U_k$ en fonction de n et p :

$$\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 0, \text{ on a } \sharp U_k = \left[\frac{n}{p^k}\right]}.$$

Déterminons $\sharp V_k$: Prenons a dans V_k. Alors $a \in \{1,\ldots,n\}$ et p^k ne divise pas a. On peut écrire $a \in \left(\{1,\ldots,n\} - U_k\right)$. Comme $\sharp\{1,\ldots,n\} = n$ et $\sharp U_k = \left[n/p^k\right]$, il s'ensuit que

$$\sharp V_k = \sharp\{1,\ldots,n\} - \sharp U_k = n - \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

On a ainsi exprimé $\sharp V_k$ en fonction de n et p :

$$\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 0, \text{ on a } \sharp V_k = n - \left[\frac{n}{p^k}\right]}.$$

Déterminons $\sharp\Omega_k$: Rappelons que $\Omega_k = U_k \cap V_{k+1}$ (d'après la question précédente). On peut écrire $\sharp\Omega_k = \sharp(U_k \cap V_{k+1})$. Par principe du calcul avec les cardinaux, on a

$$\sharp(U_k \cap V_{k+1}) = \sharp U_k + \sharp V_k - \sharp(U_k \cup V_{k+1}) \quad (\blacksquare).$$

Il nous reste donc à déterminer $\sharp(U_k \cup V_{k+1})$. Observons pour cela que tout élément de $U_k \cup V_{k+1}$ est un élément de $\{1,\ldots,n\}$ par définition des ensembles U_k et V_{k+1}, soit $U_k \cup V_{k+1} \subset \{1,\ldots,n\}$.

De plus, tous les entiers compris entre 1 et n sont tels que, soit p^{k+1} divise cet entier, soit p^{k+1} ne divise pas cet entier. Nous avons vu à la question B.I.2.a que U_{k+1} est inclus dans U_k pour tout $k \geqslant 0$. Donc $U_{k+1} \cup V_{k+1} \subset U_k \cup V_{k+1}$, c'est-à-dire $\{1,\ldots,n\} \subset U_k \cup V_{k+1}$.

Des deux inclusions qui précèdent, il vient que $\{1,\ldots,n\} = U_k \cup V_{k+1}$. Comme $\sharp\{1,\ldots,n\} = n$, on a nécessairement $\sharp(U_k \cup V_{k+1}) = n$. En revenant à l'égalité ($\blacksquare$), et en remplaçant chaque cardinal du deuxième membre par sa valeur exacte, on obtient :

$$\sharp(U_k \cup V_{k+1}) = \left[\frac{n}{p^k}\right] + \left(n - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\right) - n.$$

Puisque $\sharp\Omega_k = \sharp(U_k \cup V_{k+1})$, il s'ensuit l'expression de $\sharp\Omega_k$ en fonction de n et p :

$$\boxed{\text{pour tout } k \geqslant 0, \text{ on a } \sharp\Omega_k = \left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]}.$$

B.I.4 On sait que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$. Par propriété admise dans l'énoncé, pour tous n, m entiers naturels non nuls et tout $p \in \mathscr{P}$, on a $v_p(m \cdot n) = v_p(m) + v_p(n)$. On applique cette propriété pour le calcul de $v_p(n!)$:

$$v_p(n!) = v_p\big(1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n\big) = v_p(1) + \cdots + v_p(n) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k).$$

D'après la question B.I.2.c, on sait que la famille de parties $(\Omega_0, \ldots, \Omega_{k_0-1})$ forme une partition de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$, d'où $\{1,\ldots,n\} = \bigcup_{k=0}^{k_0-1} \Omega_k$. On peut alors écrire

$$\sum_{k=1}^{n} v_p(k) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \sum_{a \in \Omega_k} v_p(a). \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} v_p(k) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \sum_{a \in \Omega_k} k.$$

Cette équivalence est due à la définition de Ω_k pour tout $k \geqslant 0$: $\Omega_k = \big\{\{a \in \{1,\ldots,n\} \mid v_p(a) = k\big\}$.

Comme $\displaystyle\sum_{a \in \Omega_k} k = k\,\sharp\Omega_k$, il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_p(k) = \sum_{k=0}^{k_0-1} k\,\sharp\Omega_k$.

k_0 est le plus petit entier tel que $k_0 \geqslant 1$ et $n < p^{k_0}$. Si $k \geqslant k_0$, on a $n < p^{k_0} \leqslant p^k < p^{k+1}$, d'où $n/p^k < 1$ et $n/p^{k+1} < 1$, et donc $[n/p^k] = [n/p^{k+1}] = 0$. Ainsi, pour tout entier $k \geqslant k_0$, on a

$$\sharp\Omega_k = \left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right] = 0 - 0 = 0.$$

Puisque $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} k\,\sharp\Omega_k = \sum_{k=0}^{k_0-1} k\,\sharp\Omega_k + \sum_{k=k_0}^{+\infty} k\,\sharp\Omega_k$ avec $\displaystyle\sum_{k=k_0}^{+\infty} k\,\sharp\Omega_k = 0$, on peut en conclure que

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{k \geqslant 0} k\,\sharp\Omega_k}.$$

Montrons qu'alors

$$v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Sachant que $v_p(n!) = \sum_{k=0}^{k_0-1} k\,\sharp\Omega_k$ et, pour tout $k \geqslant 0$, $\sharp\Omega_n = \left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]$, il vient (le premier terme de la somme est nul)

$$\begin{aligned}
v_p(n!) &= \sum_{k=0}^{k_0-1} k\left(\left[\frac{n}{p^k}\right]-\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\right) = \sum_{k=1}^{k_0-1} k\left(\left[\frac{n}{p^k}\right]-\left[\frac{n}{p^{k+1}}\right]\right)\\
&= 1\left(\left[\frac{n}{p^1}\right]-\left[\frac{n}{p^2}\right]\right)+2\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]-\left[\frac{n}{p^3}\right]\right)+\cdots+\\
&\quad +(k_0-2)\left(\left[\frac{n}{p^{k_0-2}}\right]-\left[\frac{n}{p^{k_0-1}}\right]\right)+(k_0-1)\left(\left[\frac{n}{p^{k_0-1}}\right]-\left[\frac{n}{p^{k_0}}\right]\right)\\
&= \left[\frac{n}{p^1}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^{k_0-1}}\right]-(k_0-1)\left[\frac{n}{p^{k_0}}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{k_0-1}\left[\frac{n}{p^k}\right]-(k_0-1)\left[\frac{n}{p^{k_0}}\right].
\end{aligned}$$

k_0 est le plus petit entier tel que $k_0 \geqslant 1$ et $n < p^{k_0}$. D'où $n/p^{k_0} < 1$, ce qui implique que $\left[n/p^{k_0}\right] = 0$. Puisque

$$\sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right] = \sum_{k=1}^{k_0-1}\left[\frac{n}{p^k}\right] + \sum_{k\geqslant k_0}\left[\frac{n}{p^k}\right],$$

avec $\displaystyle\sum_{k\geqslant k_0}\left[\frac{n}{p^k}\right] = 0$ (rappel de B.I.4 : pour tout $k \geqslant k_0$, $\left[n/p^k\right] = 0$), on peut conclure que

$$\boxed{v_p(n!) = \sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right]}.$$

Nous venons d'établir, dans cette partie B.I, la formule ci-dessus due à Legendre qui donne l'expression de la valuation p-adique de $n!$. Dans la partie B.II suivante, nous allons démontrer un théorème de Mertens qui précise le comportement asymptotique de la suite

$$\left(\sum_{p \text{ premier } \leqslant n}\frac{1}{p}\right)_n.$$

II Un théorème de Mertens

Dans toute cette partie II, on considère un entier $n \geqslant 2$.

B.II.1 On nous propose d'utiliser l'encadrement $x - 1 < [x] \leqslant x$ valable pour tout réel x et la formule de Legendre. Dans le cas particulier où $x = n/p$, l'encadrement ci-dessus devient :

$$\frac{n}{p} - 1 < \left[\frac{n}{p}\right] \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}.$$

$\sum_{k\geqslant 1}\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$ est la somme d'entiers TOUS strictement positifs, on a donc

$$\left[\frac{n}{p^1}\right]=\left[\frac{n}{p}\right]<\sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Comme $\dfrac{n}{p}-1<\left[\dfrac{n}{p}\right]$ et $\left[\dfrac{n}{p}\right]<\sum_{k\geqslant 1}\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$ il vient :

$$\frac{n}{p}-1<\sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right].$$

On revient à l'encadrement $x-1<[x]\leqslant x$, et on l'applique à $x=n/p^k$ afin d'obtenir

$$\frac{n}{p^k}-1<\left[\frac{n}{p^k}\right]\leqslant\frac{n}{p^k}\quad\Rightarrow\quad\sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right]\leqslant\sum_{k\geqslant 1}\frac{n}{p^k}=n\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{p}\right)^k.$$

On reconnaît ici une série géométrique de premier terme $1/p$ et de raison $1/p$. De plus, on sait que comme $\left|\dfrac{1}{p}\right|<1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{p}\right)^n=0$, donc l'inégalité précédente devient :

$$\sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right]\leqslant n\frac{1}{p}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{n}{p}\,\frac{1}{\frac{p-1}{p}}=\frac{n}{p}\,\frac{p}{p-1}=\frac{n}{p}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)=\frac{n}{p}+\frac{n}{p(p-1)}.$$

Comme $\sum_{k\geqslant 1}\left[\dfrac{n}{p^k}\right]\leqslant\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{n}{p^k}=\dfrac{n}{p}+\dfrac{n}{p(p-1)}$ et $\dfrac{n}{p}-1<\sum_{k\geqslant 1}\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$, on a les inégalités

$$\frac{n}{p}-1<\sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{n}{p^k}\right]\leqslant\frac{n}{p}+\frac{n}{p(p-1)}.$$

Enfin, d'après la formule de Legendre, on a $v_p(n!)=\sum_{k\geqslant 1}\left[\dfrac{n}{p^k}\right]$. Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout } p\in\mathscr{P} \text{ on a les inégalités } \frac{n}{p}-1<v_p(n!)\leqslant\frac{n}{p}+\frac{n}{p(p-1)}}.$$

B.II.2 On nous propose de commencer par montrer l'égalité : $n!=\prod_{p\leqslant n}p^{v_p(n!)}$.

Par propriété admise dans l'énoncé, la décomposition en facteurs premiers de l'entier $n!$ peut s'écrire $n!=\prod_{p\in\mathscr{P}}p^{v_p(n!)}$. Si p est un nombre premier tel que $p>n$, alors pour tout entier $k\in\{1,\dots,n\}$, on a (établi au début de la question B.I.4) $v_p(n!)=\sum_{k=1}^n v_p(k)=0$. On en déduit

$$n!=\prod_{p\leqslant n}p^{v_p(n!)}.$$

En passant au logarithme népérien et en appliquant ses propriétés, on obtient

$$\ln(n!)=\ln\left(\prod_{p\leqslant n}p^{v_p(n!)}\right)=\sum_{p\leqslant n}\ln\left(p^{v_p(n!)}\right)=\sum_{p\leqslant n}v_p(n!)\ln(p)\quad(\clubsuit).$$

Rappelons le résultat de la question précédente : pour tout $p \in \mathscr{P}$, on a les inégalités

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{p} - 1 < v_p(n!) \leqslant \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)} \\
\overset{\ln(p)>0}{\Leftrightarrow} \quad & \left(\frac{n}{p} - 1\right)\ln(p) < v_p(n!)\ln(p) \leqslant \left(\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}\right)\ln(p) \\
\Rightarrow \quad & \sum_{p\leqslant n}\left(\left(\frac{n}{p} - 1\right)\ln(p)\right) < \sum_{p\leqslant n} v_p(n!)\ln(p) \leqslant \sum_{p\leqslant n}\left(\left(\frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}\right)\ln(p)\right) \\
\overset{(\clubsuit)}{\Leftrightarrow} \quad & \sum_{p\leqslant n}\left(\frac{n}{p}\ln(p) - \ln(p)\right) < \ln(n!) \leqslant \sum_{p\leqslant n}\left(\frac{n}{p}\ln(p) + \frac{n}{p(p-1)}\ln(p)\right),
\end{aligned}$$

ou encore, ce qui est demandé,

$$\boxed{n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p} - \sum_{p\leqslant n}\ln(p) < \ln(n!) \leqslant n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p} + n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p(p-1)}}\,.$$

B.II.3.a **Dans cette question, et sauf mention contraire, les sommes non indicées sont valables pour les entiers $k \geqslant 0$.** On nous propose de nous intéresser à la série entière $\sum x^k/2^k$, ainsi qu'à sa série dérivée. En posant $a_k = 1/2^k$ pour tout entier $k \geqslant 0$, nous obtenons la série entière $\sum a_k\, x^k = \sum x^k/2^k$. Notons R son rayon de convergence. *Tous les termes a_k sont réels et strictement positifs.* On a :

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2^{k+1}}\,\frac{2^k}{1} = \frac{2^k}{2\times 2^k} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, on a $R = 2$ et la série $\sum a_k\, x^k$ converge absolument sur l'intervalle $]-R,R[=]-2,2[$.

Observons que $\sum x^k/2^k = \sum(x/2)^k$ est une série géométrique de terme général $u_k = \left(\frac{x}{2}\right)^k$ pour tout entier $k \geqslant 0$ et pour tout réel $x \in]-2,2[$. Les sommes partielles de la série $\sum u_k$ sont les nombres

$$s_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_k = \left(\frac{x}{2}\right)^0 + \left(\frac{x}{2}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{x}{2}\right)^k = u_0\,\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{x}{2}}.$$

Si $x \in]-2,2[$ alors $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, ce qui implique $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+1} = 0$ et

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{2-x}{2}} = \frac{2}{2-x}.$$

La série géométrique de terme général $\left(\frac{x}{2}\right)^l$ est absolument convergente et sa somme est

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{x}{2}\right)^k = \frac{2}{2-x}.$$

D'une part, la série dérivée de la série entière $\sum a_k\, x^k$ est la dérivée de la fonction $x \longmapsto \frac{2}{2-x}$ sur $]-2,2[$. Pour tout $x \in]-2,2[$, on a

$$\left(\frac{2}{2-x}\right)' = -2\left(\frac{-1}{(2-x)^2}\right) = \frac{2}{(2-x)^2}.$$

Rappelons qu'une série entière et sa dérivée ont le même rayon de convergence.

D'autre part, par théorème du cours, la série dérivée de la série entière $\sum a_k\, x^k$ est la série $\sum \frac{k+1}{2^{k+1}}\, x^k$. Observons que $\sum\limits_{k\geqslant 0} (k+1) a_{k+1}\, x^k = \sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{k+1}{2^{k+1}}\, x^k$.

En posant $\ell = k+1$, on a $k = \ell - 1$, et si $k \geqslant 0$ alors $\ell \geqslant 1$. On obtient :

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{k+1}{2^{k+1}}\, x^k = \sum_{\ell\geqslant 1} \frac{\ell}{2^\ell}\, x^{\ell-1}.$$

ℓ étant une variable muette, on peut la remplacer par k. La série dérivée de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} a_k\, x^k$ s'écrit $\sum_{k\geqslant 1} \frac{k}{2^k}\, x^{k-1}$. En identifiant les deux expressions obtenues pour la série dérivée de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} a_k\, x^k$, on obtient :

$$\text{pour tout } x \in]-2,2[, \quad \sum_{k\geqslant 1} \frac{k}{2^k}\, x^{k-1} = \frac{2}{(2-x)^2}.$$

Dans le cas particulier où $x = 1$ ($1 \in]-2,2[$), la série dérivée $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{k}{2^k}\, 1^{k-1} = \sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{k}{2^k}$ converge absolument et est égale à $\frac{2}{(2-1)^2} = \frac{2}{1^2} = 2$. k étant une variable muette, on peut la remplacer par r et conclure que

$$\boxed{\text{la série } \sum \frac{r}{2^r} \text{ converge absolument et } \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r} = 2}.$$

B.II.3.b Observons que, pour tout entier $m \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{m(m-1)} = \frac{m-m+1}{m(m-1)} = \frac{m}{m(m-1)} - \frac{m-1}{m(m-1)} = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}.$$

Pour tout entier $r \geqslant 1$, on a $2^{r-1} \geqslant 2^0 = 1$. Si $2^{r-1} < m \leqslant 2^r$, alors $m \in \{2^{r-1}+1, \ldots, 2^r\}$ (ensemble pour lequel $m \geqslant 2$) et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r} \frac{1}{m(m-1)} &= \sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{1}{m-1} \\
&= \sum_{\ell=2^{r-1}}^{2^r-1} \frac{1}{\ell} - \sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{1}{m} \qquad \text{(avec le changement d'indice } \ell = m-1\text{)} \\
&= \sum_{m=2^{r-1}}^{2^r-1} \frac{1}{m} - \sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{1}{m} \qquad \text{(car } \ell\text{, muette, peut être remplacée par } m\text{)} \\
&= \left(\frac{1}{2^{r-1}} + \sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r-1} \frac{1}{m}\right) - \left(\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r-1} \frac{1}{m} + \frac{1}{2^r}\right) \\
&= \frac{1}{2^{r-1}} - \frac{1}{2^r} = \frac{2}{2^{r-1}\times 2} - \frac{1}{2^r} = \frac{2}{2^r} - \frac{1}{2^r} = \frac{2-1}{2^r} = \frac{1}{2^r}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{pour tout entier } r \geqslant 1, \quad \sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r} \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{2^r}}.$$

Posons $U_r = \displaystyle\sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r} \frac{\ln(m)}{m(m-1)}$. Nous allons en déduire qu'alors, on a l'inégalité

$$U_r \leqslant \frac{r}{2^r}\ln(2).$$

Pour tout entier m vérifiant $2^{r-1} < m \leqslant 2^r$, on a, en passant au logarithme népérien : $\ln(m) \leqslant \ln(2^r)$, et puisque $\frac{1}{m(m-1)} > 0$, on a

$$\frac{\ln(m)}{m(m-1)} \leqslant \frac{\ln(2^r)}{m(m-1)}.$$

Cette inégalité est vraie pour tous les entiers m compris entre 2^{r-1} et 2^r et en sommant, on obtient :

$$\sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} \leqslant \sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r} \frac{\ln(2^r)}{m(m-1)}.$$

Or, en utilisant le résultat précédemment encadré,

$$\sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r} \frac{\ln(2^r)}{m(m-1)} = \ln(2^r) \sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r} \frac{1}{m(m-1)} = \ln(2^r)\,\frac{1}{2^r}.$$

Enfin, d'après la définition de U_r, la dernière inégalité s'écrit alors $U_r \leqslant \dfrac{r\ln(2)}{2^r}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier } r \geqslant 1, \text{ on a l'inégalité } U_r \leqslant \frac{r\ln(2)}{2^r}}.$$

B.II.3.c D'après la question précédente, pour tout entier $r \geqslant 1$, on a les inégalités $0 \leqslant U_r \leqslant \frac{r}{2^r}\ln(2)$ (U_r et $\frac{r}{2^r}\ln(2)$ sont des nombres réels positifs ou nuls). De plus, d'après la question B.II.3.a, la série $\sum \frac{r}{2^r}$ est absolument convergente. Il en est de même pour la série $\sum \frac{r}{2^r}\ln(2)$. Par théorème de comparaison,

$$\boxed{\text{la série } \sum U_r \text{ est convergente, et l'on a } \sum_{r=1}^{+\infty} U_r \leqslant \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r}\ln(2)}.$$

Nous allons donner un majorant de cette série. Observons que

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{r}{2^r}\ln(2) = \ln(2)\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{r}{2^r} \overset{\text{BII.3.a}}{=} 2\ln(2).$$

D'après le résultat encadré ci-dessus, on peut donc dire que

$$\boxed{2\ln(2) \text{ est un majorant de } \sum_{r=1}^{+\infty} U_r}.$$

B.II.3.d La série $\sum\limits_{m\geqslant 2} \dfrac{\ln(m)}{m(m-1)}$ est à termes strictement positifs. On peut lui associer la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{m=2}^{n} \dfrac{\ln(m)}{m(m-1)}$ de ses sommes partielles.

Par définition, si la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente, alors la série $\sum\limits_{m\geqslant 2} \dfrac{\ln(m)}{m(m-1)}$ est convergente.

On remarque que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$u_{n+1} = \sum_{m=2}^{n+1} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} = \sum_{m=2}^{n} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)(n+1-1)} = u_n + \frac{\ln(n+1)}{n(n+1)}.$$

Comme, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{\ln(n+1)}{n(n+1)} > 0$, il vient

$$\frac{\ln(n+1)}{n(n+1)} + u_n > u_n \quad \Leftrightarrow \quad u_{n+1} > u_n.$$

Cette inégalité permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement croissante.

Pour montrer que cette suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ converge dans $\mathbb{R}$, il suffit de montrer à présent qu'elle est majorée. Il est astucieux de voir que, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un entier k tel que $n+1 \leqslant 2^k$. Ainsi, on peut écrire

$$\sum_{m=2}^{n} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} < \sum_{m=2}^{n+1} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} \leqslant \sum_{m=2}^{2^k} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} = \sum_{m=2}^{2^k} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} = \sum_{r=1}^{k} \left(\sum_{2^{r-1}<m\leqslant 2^r} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} \right).$$

Par définition même des nombres u_n et U_r, il s'ensuit l'inégalité suivante :

$$u_n < \sum_{r=1}^{k} U_r.$$

Tous les termes U_r étant strictement positifs on a $\sum_{r=1}^{k} U_r < \sum_{r=1}^{+\infty} U_r$. Donc, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $u_n < \sum_{r=1}^{+\infty} U_r$.

D'après la question précédente, $2\ln(2)$ est un majorant de $\sum_{r=1}^{+\infty} U_r$. $2\ln(2)$ est alors aussi un majorant de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$, ce qui permet de justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ (toute suite croissante et majorée converge dans $\mathbb{R}$!). Et par définition rappelée ci-dessus, on peut affirmer que

$$\boxed{\text{la série } \sum \frac{\ln(m)}{m(m-1)} \text{ est convergente}}.$$

Remarque : Pour montrer la convergence de cette série, on aurait pu se contenter de montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ de ses sommes partielles est majorée. En effet, par proposition du cours, « une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée ». Il n'était pas nécessaire de montrer la croissance de la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Par passage à la limite, on trouve

$$\sum_{m=2}^{n} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} \leqslant 2\ln(2) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=2}^{n} \frac{\ln(m)}{m(m-1)}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\big(2\ln(2)\big),$$

ou encore l'inégalité demandée :

$$\boxed{\sum_{m=2}^{+\infty} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} \leqslant 2\ln(2) = \ln(4).}$$

B.II.3.e On nous propose de commencer par déterminer pour quels réels u on a les inégalités $u-\frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$. Posons $f(u) = \ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}$ et $g(u) = u - \ln(1+u)$. Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur $]-1,+\infty[$.

Étudions tout d'abord le signe de $f(u)$: Pour tout réel $u > -1$, on a

$$f'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 + u = \frac{1-(1+u)+u(1+u)}{1+u} = \frac{u^2}{1+u}.$$

Établissons un tableau de signes :

Valeurs de u	-1		0		$+\infty$
Signe de u^2		$+$	0	$+$	
Signe de $1+u$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(u)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

Pour tout réel $u > -1$, on a $f'(u) \geqslant 0$. La fonction f est croissante sur $]-1,+\infty[$. Observons que

$$f(0) = \frac{1}{1+0} - 1 + 0 = 1 - 1 = 0.$$

Si $u < 0$, alors $f(u) < f(0) = 0$ (par stricte croissance de la fonction f). Donc, si $u \geqslant 0$, alors $f(u) \geqslant f(0) = 0$ (par croissance de la fonction f).

Étudions à présent le signe de $g(u)$: Pour tout réel $u > -1$, on a

$$g'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{1+u-1}{1+u} = \frac{u}{1+u}.$$

Établissons un tableau de signes :

Valeurs de u	-1		0		$+\infty$
Signe de u		$-$	0	$+$	
Signe de $1+u$	0	$+$		$+$	
Signe de $g'(u)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Si $u \in]-1,0[$, alors $g'(u) < 0$ et g est strictement décroissante sur $]-1,0[$. Si $u = 0$, alors $g'(u) = 0$ et g admet un extremum (ici, un minimum) en $u = 0$. Si $u > 0$, alors $g'(u) > 0$ et g est strictement croissante sur l'intervalle $]-1,+\infty[$. Le calcul de $g(0)$ donne $g(0) = 0 - \ln(1+0) = -\ln(1) = 0$. Donc $g(u) \geqslant 0$ dès que $u > -1$, donc en particulier $u \geqslant 0$.

Récapitulons ce qui nous intéresse : pour tout réel $u \geqslant 0$, on a $f(u) \geqslant 0$ et $g(u) \geqslant 0$. Si on revient à la définition des fonctions f et g, alors pour tout réel $u \geqslant 0$, on a simultanément $\ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2} \geqslant 0$ et $u - \ln(1+u) \geqslant 0$. Ce qui permet d'affirmer que :

$$\boxed{\text{pour tout réel } u \in [0,+\infty[, \text{ on a la double-inégalité } u - \frac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $1/n > 0$, c'est-à-dire $1/n \in [0,+\infty[$. On peut donc remplacer u par $1/n$ dans la double-inégalité ci-dessus et on obtient :

$$\frac{1}{n} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \quad \overset{n>0}{\Leftrightarrow} \quad n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\frac{1}{2}\right) \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant n\frac{1}{n}.$$

En simplifiant les écritures, nous pouvons conclure que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ on a la double-inégalité } 1 - \frac{1}{2n} \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant 1}.$$

Nous allons en déduire l'autre inégalité. De la double-inégalité trouvée ci-dessus, on tire $1 - \frac{1}{2n} \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, soit, en divisant chaque membre par $n > 0$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $n^2 \geqslant n$, ou encore $1/n^2 \leqslant 1/n$ (la fonction $x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$) d'où les implications successives

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2n^2} \geqslant -\frac{1}{2n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Comme pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$ et $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \geqslant \frac{1}{2n}$, il s'ensuit que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \text{ on a l'inégalité } \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{2n}}.$$

B.II.3.f Procédons par récurrence sur l'entier n : on considère la propriété $\mathscr{P}$ définie pour $n \geqslant 2$ par

$$\mathscr{P}(n) : \text{il existe un réel } \theta_n \in [0,1] \text{ tel que } \ln(n!) = n\ln(n) - n + 1 + \theta_n \ln(n).$$

Initialisation ($n = 2$) : Observons que, si $n = 2$, alors :

– d'une part, $\ln(2!) = \ln(2 \times 1) = \ln(2)$,

– d'autre part, $n\ln(n) - n + 1 + \theta_n \ln(n) = 2\ln(2) - 2 + 1 + \theta_2 \ln(2) = 2\ln(2) - 1 + \theta_2 \ln(2)$.

Nous voulons que le réel θ_2 vérifie l'égalité $\ln(2) = 2\ln(2) - 1 + \theta_2 \ln(2)$. Évaluons le réel θ_2 en l'isolant dans cette équation. Il vient :

$$\theta_2 = \frac{\ln(2) - 2\ln(2) + 1}{\ln(2)} = \frac{1 - \ln(2)}{\ln(2)}.$$

La calculatrice donne $\theta_2 \approx 0,44$, ce qui est bien un réel de l'intervalle $[0,1]$. Pour $n = 2$, il existe un réel $\theta_2 \approx 0,44 \in [0,1]$ tel que $\ln(n!) = n\ln(n) - n + 1 + \theta_n \ln(n)$. La propriété $\mathscr{P}$ est donc initialisée, elle est vraie au rang $n = 2$.

Hérédité : Par hypothèse d'hérédité, supposons que, pour un certain entier $m \geqslant 2$ fixé, on a la propriété $\mathscr{P}(m)$. Montrons qu'alors on a la propriété

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(m+1) : \exists\, \theta_{m+1} \in [0,1] \mid \ln\big((m+1)!\big) &= (m+1)\ln(m+1) - (m+1) + 1 + \theta_{m+1}\ln(m+1)\\ &= (m+1)\ln(m+1) - m + \theta_{m+1}\ln(m+1).\end{aligned}$$

On a, par définition de la factorielle : $\ln\big((m+1)!\big) = \ln\big(m!\,(m+1)\big)$, et en appliquant la propriété de calcul du logarithme népérien $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, on trouve

$$\ln\big((m+1)!\big) = \ln(m!) + \ln(m+1).$$

Appliquons l'hypothèse d'hérédité en remplaçant $\ln(m!)$ par son expression :

$$\ln\big((m+1)!\big) = m\ln(m) - m + 1 + \theta_m\ln(m) + \ln(m+1).$$

Nous voulons identifier les deux écritures de $\ln\big((m+1)!\big)$ et l'égalité obtenue sera vraie si et seulement si le réel θ_{m+1} vérifie l'égalité

$$(m+1)\ln(m+1) - m + \theta_{m+1}\ln(m+1) = m\ln(m) - m + 1 + \theta_m\ln(m) + \ln(m+1).$$

Évaluons le réel θ_{m+1} en l'isolant dans cette équation. On trouve :

$$\begin{aligned}\theta_{m+1} &= \frac{m\ln(m) - m + 1 + \theta_m\ln(m) + \ln(m+1) - (m+1)\ln(m+1) + m}{\ln(m+1)}\\
&= \frac{m\ln(m) + 1 + \theta_m\ln(m) + \ln(m+1) - m\ln(m+1) - \ln(m+1)}{\ln(m+1)}\\
&= \frac{1 + \theta_m\ln(m) - m\ln(m+1) - m\big(-\ln(m)\big)}{\ln(m+1)} \quad \text{car } m\ln(m) = (-m)\big(-\ln(m)\big)\\
&= \frac{1 + \theta_m\ln(m) - m\big[\ln(m+1) - \ln(m)\big]}{\ln(m+1)} \quad \text{en factorisant par } (-m)\\
&= \frac{1 + \theta_m\ln(m) - m\ln\big(\frac{m+1}{m}\big)}{\ln(m+1)} \quad \text{car } \ln(a) - \ln(b) = \ln\Big(\frac{a}{b}\Big)\\
&= \frac{1 + \theta_m\ln(m) - m\ln\big(1 + \frac{1}{m}\big)}{\ln(m+1)}.\end{aligned}$$

Nous devons maintenant vérifier que le réel θ_{m+1} appartient à l'intervalle $[0,1]$, c'est-à-dire vérifier la double-inégalité $0 \leqslant \theta_{m+1} \leqslant 1$. On sait déjà que θ_m est un réel de l'intervalle $[0,1]$, ce qui s'écrit $0 \leqslant \theta_m \leqslant 1$, d'où les implications successives :

$$\begin{aligned}& 0\ln(m) \leqslant \theta_m\ln(m) \leqslant 1\ln(m) \quad \text{car pour tout entier } m \geqslant 2, \text{ on a } \ln(m) > 0\\
\Rightarrow\ & 0 + 1 - m\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) \leqslant \theta_m\ln(m) + 1 - m\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) \leqslant \ln(m) + 1 - m\ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)\\
\Rightarrow\ & \frac{1 - m\ln\big(1 + \frac{1}{m}\big)}{\ln(1+m)} \leqslant \frac{\theta_m\ln(m) + 1 - m\ln\big(1 + \frac{1}{m}\big)}{\ln(1+m)} \leqslant \frac{\ln(m) + 1 - m\ln\big(1 + \frac{1}{m}\big)}{\ln(1+m)}\end{aligned}$$

(car pour tout entier $m \geqslant 2$, on a $1/\ln(1+m) > 0$), ou encore,

$$\frac{1 - m\ln\big(1 + \frac{1}{m}\big)}{\ln(1+m)} \leqslant \theta_{m+1} \leqslant \frac{\ln(m) + 1 - m\ln\big(1 + \frac{1}{m}\big)}{\ln(1+m)}.$$

Exploitons les résultats de la question précédente : soit $m \geqslant 2$ un entier. Alors

$$m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad -m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \geqslant -1 \quad \Rightarrow \quad 1-m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \geqslant 1-1=0$$
$$\overset{\frac{1}{\ln(m+1)}>0}{\Rightarrow} \quad \frac{1-m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\ln(1+m)} \geqslant \frac{0}{\ln(1+m)} = 0.$$

Comme $\theta_{m+1} \geqslant \dfrac{1-m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\ln(1+m)}$, on trouve $\theta_{m+1} \geqslant 0$.

Toujours d'après la question précédente, pour tout entier $m \geqslant 2$, on a les inégalités :

$$m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \geqslant 1-\frac{1}{2m} \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \geqslant \frac{1}{2m} \Rightarrow -\frac{1}{2m} \geqslant -\ln\left(1+\frac{1}{m}\right),$$

d'où l'inégalité suivante, par transitivité des relations d'ordre :

$$\begin{aligned}
& m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \geqslant 1-\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \\
\Rightarrow \quad & -m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \leqslant -\left(1-\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\right) = \ln\left(1+\frac{1}{m}\right)-1 \\
\Rightarrow \quad & 1+\ln(m)-m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{m}\right)-1+1+\ln(m) = \ln\left(m\left(1+\frac{1}{m}\right)\right) = \ln(m+1) \\
\overset{\frac{1}{\ln(m+1)}>0}{\Rightarrow} \quad & \frac{1+\ln(m)-m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\ln(1+m)} \leqslant \frac{\ln(m+1)}{\ln(m+1)} = 1.
\end{aligned}$$

Comme $\theta_{m+1} \leqslant \dfrac{1+\ln(m)-m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\ln(1+m)}$, il s'ensuit que $\theta_{m+1} \leqslant 1$.

Nous venons de vérifier que $\theta_{m+1} \in [0,1]$, ce qui justifie $\mathscr{P}(m+1)$. La propriété $\mathscr{P}$ est donc héréditaire à partir du rang $n=2$, c'est-à-dire que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a l'implication $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Bilan : On a $\mathscr{P}(2)$ et pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$. D'après le principe du raisonnement par récurrence, la propriété $\mathscr{P}$ est vraie à tout rang plus grand que $n=2$:

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 2, \text{ il existe } \theta_n \in [0,1] \text{ tel que } \ln(n!) = n\ln(n)-n+1+\theta_n\ln(n)}.$$

B.II.4 Soient p un nombre premier de $\mathscr{P}$ et n un entier supérieur ou égal à 2. Nous revenons au résultat de la question B.II.2 qui donne l'inégalité

$$\ln(n!) \leqslant n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p} + n\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p(p-1)} = n\left(\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p} + \sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p(p-1)}\right)$$
$$\overset{1/n>0}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\ln(n!)}{n} \leqslant \sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p} + \sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p(p-1)}. \qquad (\flat)$$

Or, d'après la question précédente, il existe un réel $\theta_n \in [0,1]$ tel que $\ln(n!) = n\ln(n)-n+1+\theta_n\ln(n)$. Comme $\theta_n \geqslant 0$, on a $0\ln(n) \leqslant \theta_n\ln(n)$ (car $\ln(n)>0$), d'où $0 < 1+0 \leqslant 1+\theta_n\ln(n)$, c'est-à-dire

$n\big(\ln(n)-1\big) \leqslant \ln(n!)$. On en tire $\ln(n)-1 \leqslant \ln(n!)/n$ et grâce à l'inégalité ($\flat$) et à la transitivité des relations d'ordre, on a

$$\ln(n)-1 \leqslant \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} + \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p(p-1)}.$$

Il est facile de voir que

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{m=2}^{n} \frac{\ln(m)}{m(m-1)}.$$

En effet, tous les termes $\frac{\ln(m)}{m(m-1)}$ sont strictement positifs. Dans l'inégalité précédente, la somme des termes qui constituent le membre de gauche est strictement inclus dans l'ensemble des termes qui constituent le membre de droite. Il y a moins de termes dans la somme de gauche que dans celle de droite.

Dans la question B.II.3.c, nous avons montré la majoration

$$\sum_{m=2}^{n} \frac{\ln(m)}{m(m-1)} \leqslant \ln(4).$$

Puisque $\displaystyle\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{m=2}^{n} \frac{\ln(m)}{m(m-1)}$, il vient par transitivité des relations d'ordre,

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \ln(4).$$

D'où, toujours par transitivité des relations d'ordre,

$$\begin{aligned} &\ln(n)-1 \leqslant \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} + \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p(p-1)} \leqslant \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} + \ln(4) \\ \Rightarrow\quad &\ln(n)-1 \leqslant \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} + \ln(4) \quad\Leftrightarrow\quad \ln(n)-1-\ln(4) \leqslant \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p}, \end{aligned}$$

d'où le résultat

$$\boxed{\text{pour tout } p\in\mathscr{P} \text{ et pour tout entier } n\geqslant 2, \text{ on a l'inégalité } \ln(n)-\big(1+\ln(4)\big) \leqslant \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p}}.$$

B.II.5 Soient p un entier de $\mathscr{P}$ et n un entier supérieur ou égal à 2. Rappelons le résultat de la question B.II.2 qui nous donne l'inégalité

$$n\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} - \sum_{p\leqslant p} \ln(p) < \ln(n!),$$

d'où on tire

$$n\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} < \ln(n!) + \sum_{p\leqslant p} \ln(p) \overset{1/n>0}{\Leftrightarrow} \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} < \frac{1}{n}\left(\ln(n!) + \sum_{p\leqslant n} \ln(p)\right) = \frac{\ln(n!)}{n} + \frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n} \ln(p).$$

En passant l'inégalité de la question A.II.f au logarithme népérien (la fonction $x\mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$), on trouve :

$$\ln(\prod_{p\leqslant n} p) \leqslant \ln(4^n) = n\ln(4) \quad\overset{1/n>0}{\Leftrightarrow}\quad \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{p\leqslant n} p\right) \leqslant \frac{1}{n}n\ln(4) = \ln(4).$$

Comme $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\ln(p)=\dfrac{1}{n}\ln\left(\prod_{p\leqslant n}p\right)$, l'inégalité s'écrit

$$\frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n}\ln(p)\leqslant\ln(4)\quad\Leftrightarrow\quad\ln(n)+\frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n}\ln(p)\leqslant\ln(n)+\ln(4).$$

De plus, $\ln(n!)=\ln(1\times\cdots\times n)=\ln(1)+\cdots+\ln(n)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$ (par définition de la factorielle et par propriété de calcul du logarithme népérien). Comme la fonction ln est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on a pour tout entier k vérifiant $1\leqslant k\leqslant n$, $\ln(k)\leqslant\ln(n)$. Tous les n termes de la somme $\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$ sont inférieurs à $\ln(n)$. On peut donc écrire

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(k)=\ln(1)+\cdots+\ln(n)\leqslant\ln(n)+\cdots+\ln(n)=n\ln(n).$$

D'où $\ln(n!)\leqslant n\ln(n)$, soit $\ln(n!)/n\leqslant\ln(n)$, d'où

$$\frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n}\ln(p)+\frac{\ln(n!)}{n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n}\ln(p)+\ln(n).$$

Mais $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\ln(p)+\ln(n)\leqslant\ln(n)+\ln(4)$, on obtient alors bien, par transitivité des relations d'ordre,

$$\frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n}\ln(p)+\frac{\ln(n!)}{n}\leqslant\ln(n)+\ln(4).$$

Comme $\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p}<\frac{1}{n}\sum_{p\leqslant n}\ln(p)+\frac{\ln(n!)}{n}$, on obtient l'inégalité demandée par transitivité des relations d'ordre :

$$\boxed{\text{pour tout entier } p \text{ de } \mathscr{P} \text{ et pour tout entier } n\geqslant 2,\text{ on a l'inégalité } \sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p}\leqslant\ln(n)+\ln(4)}.$$

Nous allons maintenant justifier le théorème de Mertens. Pour cela, on utlise les inégalités obtenues dans ces deux dernières questions afin d'obtenir l'encadrement suivant :

$$\begin{aligned}
&\ln(n)-\big(1+\ln(4)\big)\leqslant\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p}\leqslant\ln(n)+\ln(4)\\
\Leftrightarrow\quad&-\big(1+\ln(4)\big)\leqslant\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p}-\ln(n)\leqslant\ln(4)<1+\ln(4)\\
\Leftrightarrow\quad&\left|\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p}-\ln(n)\right|\leqslant 1+\ln(4).
\end{aligned}$$

En effet, *pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, $|a|\leqslant b$ est équivalent à $-b\leqslant a\leqslant b$.* Considérons maintenant les suites numériques $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies par

$$u_n=\sum_{p\leqslant n}\frac{\ln(p)}{p}-\ln(n)\qquad\text{et}\qquad v_n=1,$$

et posons $c = 1+\ln(4)$. L'inégalité ci-dessus peut alors s'écrire $|u_n| \leqslant c|v_n|$. L'énoncé nous donne la définition suivante : *si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ désignent deux suites numériques, alors on notera $u_n = O(v_n)$ pour dire que la suite $(u_n)_n$ est* dominée *par la suite $(v_n)_n$, c'est-à-dire qu'il existe un réel c et un entier n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $|u_n| \leqslant c|v_n|$.*

Par conséquent, pour tout $n \geqslant 2$, on a $u_n = O(v_n)$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(n) = O(1)$, ou encore, ce qui est le résultat attendu :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 2,\ \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1)}.$$

Nous venons d'établir, dans cette partie B.II, le théorème de Mertens qui s'énonce ainsi :

Théorème de Mertens :

Pour tout entier p de $\mathscr{P}$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\boldsymbol{\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(n) + O(1).}$$

La suite $\displaystyle\left(\sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} - \ln(n)\right)_n$ est dominée par la suite constante de valeur 1.

Ce théorème va nous permettre d'étudier le comportement asymptotique de la suite $\displaystyle\left(\sum_{p\leqslant n} \frac{1}{p}\right)_n$ qui est le but de la partie suivante.

III Le comportement asymptotique de $\displaystyle\left(\sum_{p\leqslant n} \frac{1}{p}\right)_n$

B.III.1 Dans cette question, on établit des résultats préliminaires utiles pour la suite.

B.III.1.a On nous propose de comparer ces séries avec les intégrales généralisées

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)} \qquad \text{et} \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}.$$

Soit $\alpha \in \{1,2\}$. On considère la fonction f_α définie sur $[2,+\infty[$ par

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{t\ln^\alpha(t)}.$$

La fonction f_α est dérivable sur $[2,+\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 2$, on a :

$$f'_\alpha(t) = -\frac{1\ln^\alpha(t) + t\alpha\frac{1}{t}\ln^{\alpha-1}(t)}{\left[t\ln^\alpha(t)\right]^2} = \frac{-\ln^{\alpha-1}(t)\big(\ln(t)+\alpha\big)}{\left[t\ln^\alpha(t)\right]}.$$

Pour tout entier $\alpha \in \{1,2\}$ et pour tout réel $t \geqslant 2$, on a

$$\frac{\ln(t)+\alpha}{\left[t\ln^{\alpha}(t)\right]} > 0.$$

f'_α est donc du signe de $-\ln^{\alpha-1}(t)$. Or, pour tout réel $t \geqslant 2$, $\ln^{\alpha-1}(t) > 0$, ce qui implique $-\ln^{\alpha-1}(t) < 0$. Donc, si $t \geqslant 2$, alors $f'_\alpha(t) < 0$, ce qui justifie que la fonction f_α est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$. Elle est de plus continue et positive sur $[2,+\infty[$.

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Le fait que la fonction f_α est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$ entraîne que si $k \leqslant t \leqslant k+1$, alors $f_\alpha(k+1) \leqslant f_\alpha(t) \leqslant f_\alpha(k)$. Comme f_α est continue sur $[2,+\infty[$, nous pouvons intégrer cette double-inégalité entre k et $k+1$, et on obtient :

$$\begin{aligned} &\int_k^{k+1} f_\alpha(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f_\alpha(k)\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad & f_\alpha(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(k). \end{aligned}$$

Ajoutons ces inégalités pour $k = 2,\dots,n$:

$$f_\alpha(3)+\cdots+f_\alpha(n+1) \leqslant \int_2^3 f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t+\cdots+\int_n^{n+1} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_\alpha(2)+\cdots+f_\alpha(n).$$

En appliquant la formule de Chasles pour la somme des intégrales, on obtient :

$$\sum_{k=3}^{n+1} f_\alpha(k) \leqslant \int_2^{n+1} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} f_\alpha(k).$$

Nous allons exploiter ces inégalités pour bien voir que la série $\sum \frac{1}{n\ln^{\alpha}(n)}$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^{\alpha}(t)}$ ont même nature. Le calcul de $\int_2^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ selon les valeurs de α va nous donner les résultats demandés.

Premier cas : Supposons $\alpha = 1$. Dans ce cas, $\displaystyle\int_2^{n+1} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}$. Effectuon le changement de variables $x = \ln(t)$, d'où $1/x = 1/\ln(t)$ et $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 1/t$, c'est-à-dire $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/t$. Si $t = 2$, alors $x = \ln(2)$, et si $t = n+1$, alors $x = \ln(n+1)$. Par ce changement de variables, on obtient :

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \int_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x)\right]_{\ln(2)}^{\ln(n+1)} = \ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big).$$

Observons alors que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(2)\big)\right] = +\infty.$$

Rappelons que, par définition, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente si et seulement si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. En utilisant cette définition, on peut dire que $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$ est divergente. Reprenons alors l'inégalité qui nous intéresse :

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} f_1(k).$$

En passant à la limite, on trouve

$$+\infty = \lim_{n\to\infty}\left(\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n} f_1(k)\right).$$

Les sommes partielles $f_1(2)+\cdots+f_1(n)$ ont pour limite $+\infty$, donc la série de terme général $f_1(n)$ est divergente :

$$\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{n\ln(n)} \text{ est divergente}}.$$

Deuxième cas : Supposons $\alpha = 2$. Dans ce cas, $\displaystyle\int_2^{n+1} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)}$. Observons que la fonction $t \mapsto \ln^{-1}(t)$ est dérivable sur $[2, +\infty[$ et pour tout réel $t \geqslant 2$, on a :

$$[\ln^{-1}(t)]' = -\frac{1}{t}\ln^{-2}(t) = \frac{-1}{t\ln^2(t)}.$$

Ce qui permet d'affirmer que $-1/\ln(t)$ est une primitive de $f_2(t)$. Ainsi :

$$\int_2^{n+1}\frac{1}{t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{\ln(t)}\right]_2^{n+1} = -\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(2)}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)}\right) = \frac{1}{\ln(2)}.$$

Rappelons que, par définition, l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$ En utilisant cette définition, on peut dire que $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)}$ est convergente.

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{\ln(2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\ln^2(2)} + \int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)} \leqslant \frac{1}{2\ln^2(2)} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1+2\ln(2)}{2\ln^2(2)}.$$

Repartons de l'inégalité qui nous intéresse :

$$\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\ln^2(2)} + \sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \frac{1}{2\ln^2(2)} + \int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \frac{1}{2\ln^2(2)} + \int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)}.$$

Comme $\displaystyle\frac{1}{2\ln^2(2)} + \int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)} \leqslant \frac{1+2\ln(2)}{2\ln^2(2)}$, il vient par transitivité des relations d'ordre

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k\ln^2(k)} \leqslant \frac{1+2\ln(2)}{2\ln^2(2)}.$$

Ainsi, les sommes partielles de la série $\sum f_2(k)$ sont majorées. Une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Puisque la série $\sum f_2(n)$ est à termes strictement positifs, elle est convergente :

$$\boxed{\text{la série } \sum \frac{1}{n\ln^2(n)} \text{ est convergente}}.$$

Nous allons maintenant montrer l'égalité

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\ln(k)} = \ln\big(\ln(n)\big) + O(1).$$

Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Une démarche analogue à celle déjà effectuée légèrement plus haut donne successivement

$$\begin{aligned}
& \int_k^{k+1} f_1(k)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f_1(k+1)\,\mathrm{d}t \\
\Rightarrow \quad & f_1(3) + \cdots + f_1(n) \leqslant \int_2^n f_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f_1(2) + \cdots + f_1(n-1) \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)}.
\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale de cette double-inégalité en faisant le changement de variables $x = \ln(t)$ (déjà utilisé dans le premier cas ci-dessus). Il vient :

$$\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} = \int_{\ln(2)}^{\ln(n)} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \big[\ln(x)\big]_{\ln(2)}^{\ln(n)} = \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big).$$

La double-inégalité s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} + \frac{1}{n\ln(n)} - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} \\
\overset{\frac{1}{n\ln(n)}>0}{\Leftrightarrow} \quad & \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{2\ln(2)} \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} \\
\Rightarrow \quad & \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} \leqslant \ln\big(\ln(n)\big) - \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)} \\
\Leftrightarrow \quad & -\ln\big(\ln(2)\big) \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln\big(\ln(n)\big) \leqslant -\ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)}.
\end{aligned}$$

Mais

$$-\ln\big(\ln(2)\big) - \frac{1}{2\ln(2)} < -\ln\big(\ln(2)\big) \qquad \text{et} \qquad -\ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)} < \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)},$$

donc l'encadrement devient

$$\begin{aligned}
& -\left[\ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)}\right] \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln\big(\ln(n)\big) \leqslant \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)} \\
\Leftrightarrow \quad & \left|\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln\big(\ln(n)\big)\right| \leqslant \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)},
\end{aligned}$$

en ayant utilisée la même propriété de la valeur absolue rappelée plus haut. Considérons alors les suites numériques $(u_n)_{n\geqslant 3}$ et $(v_n)_{n\geqslant 3}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln\big(\ln(n)\big) \qquad \text{et} \qquad v_n = 1,$$

et posons $c = \ln\big(\ln(2)\big) + \frac{1}{2\ln(2)}$. La dernière inégalité s'écrit alors $|u_n| \leqslant c|v_n|$. D'après la définition rappelée à la question B.II.5 (en choisissant $n_0 = 3$), nous avons alors $u_n = O(v_n)$, ce qui s'écrit encore pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln\big(\ln(n)\big) = O(1),$$

ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 3,\ \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} = \ln\big(\ln(n)\big) + O(1)}\,.$$

B.III.1.b Pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1-1} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln\big(\ln(n+1)\big)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln\big(\ln(n)\big)\right)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)}\right) - \ln\big(\ln(n+1)\big) + \ln\big(\ln(n)\big)\\
&= \left(\frac{1}{n\ln(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)}\right) - \Big(\ln\big(\ln(n+1)\big) - \ln\big(\ln(n)\big)\Big)\\
&= \frac{1}{n\ln(n)} - \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) \qquad \text{car } \ln(a-b) = \ln(a/b) \text{ pour tous } a, b > 0.
\end{aligned}$$

Or, pour tout entier $n \geqslant 3$, on a $\ln(n+1) = \ln\big(n(1+\frac{1}{n})\big) = \ln(n) + \ln\big(1+\frac{1}{n}\big)$. Il s'ensuit

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\big(1+\frac{1}{n}\big)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{\ln\big(1+\frac{1}{n}\big)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $\ln(1+u)$ est

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, on peut remplacer u par $\frac{1}{n}$ dans ce développement limité, et on obtient

$$\begin{aligned}
&\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
\Rightarrow\ &1 + \frac{1}{\ln(n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{\ln(n)}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n\ln(n)} - \frac{1}{2n^2\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\\
\Rightarrow\ &\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n\ln(n)} - \frac{1}{2n^2\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)=0$, l'expression $\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)$ peut remplacer u dans le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+u)$, et on obtient :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) &= \frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)^2\right]\\ &\quad +o\left[\left(\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right)^2\right].\end{aligned}$$

On a effectué une substitution d'un développement limité dans un autre. Par théorème du cours, on peut affirmer que

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) &= \frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\\ &= \frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)^2-2\frac{1}{n\ln(n)}\frac{1}{2n^2\ln(n)}+\left(\frac{1}{2n^2\ln(n)}\right)^2\right]\\ &\quad +o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\\ &= \frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2\ln^2(n)}-\frac{1}{n^3\ln^2(n)}+\frac{1}{4n^4\ln^2(n)}\right)+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\\ &= \frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln^2(n)}+\frac{1}{2n^3\ln^2(n)}-\frac{1}{8n^4\ln^2(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right).\end{aligned}$$

Observons que :

◇ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{2n^2\ln^2(n)}\Big/\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2\ln(n)}{2n^2\ln^2(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{2\ln(n)}\right)=0$;

◇ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{2n^3\ln^2(n)}\Big/\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2\ln(n)}{2n^3\ln^2(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{2n\ln(n)}\right)=0$;

◇ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{8n^4\ln^2(n)}\Big/\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2\ln(n)}{8n^4\ln^2(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{8n^2\ln(n)}\right)=0.$

Ces trois calculs de limite jusitifient les relations suivantes :

$$\frac{-1}{2n^2\ln^2(n)}=o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\quad;\quad\frac{-1}{2n^3\ln^2(n)}=o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\quad;\quad\frac{-1}{8n^4\ln^2(n)}=o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right).$$

Par conséquent,

$$\frac{-1}{2n^2\ln^2(n)}-\frac{1}{2n^3\ln^2(n)}-\frac{1}{8n^4\ln^2(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)=o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right),$$

ce qui permet d'écrire

$$\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)=\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right).$$

En remplaçant dans l'expression de $u_{n+1}-u_n$, on trouve :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n\ln(n)}-\left(\frac{1}{n\ln(n)}-\frac{1}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right)\right),$$

d'où l'égalité demandée :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n\geqslant 3,\ u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n^2\ln(n)}+o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right).}$$

B.III.1.c Rappelons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est définie pour tout entier $n \geqslant 3$ par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} - \ln\big(\ln(n)\big).$$

Il s'agit donc de montrer qu'il existe un réel ℓ tel que $u_n = \ell + o(1)$ ou encore tel que $u_n - \ell = o(1)$. Exploitons pour cela le résultat de la question précécente : pour tout entier $n \geqslant 3$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n^2\ln(n)} + o\left(\frac{1}{n^2\ln(n)}\right).$$

Rappelons encore que, par définition, f est équivalente à g au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $f - g = o(g)$, ou ce qui revient au même, $f = g + o(g)$. En appliquant cette définition, nous pouvons écrire

$$u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{2n^2\ln(n)}.$$

Considérons la série $\sum \frac{1}{2n^2\ln(n)}$. Tous les termes de cette série sont strictement positifs. Pour tout entier $n \geqslant 3$, on a $\ln(n) \geqslant \ln(3) > 1$ par croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$. D'où $n^2\ln(n) > n^2 \times 1$, ou encore $\frac{1}{n^2\ln(n)} < \frac{1}{n^2}$ par décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$.

Observons que $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^2\ln(n)}$ est convergente, ou mieux $\sum \frac{1}{2n^2\ln(n)}$ est convergente.

Par proposition du cours, deux séries à termes positifs équivalentes sont de même nature. Comme $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{2n^2\ln(n)}$, on en déduit que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

Les sommes partielles sont

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{k=3}^{n}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=3}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=3}^{n} u_k \\
&\overset{\ell=k+1}{=} \sum_{\ell=4}^{n+1} u_\ell - \sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=4}^{n+1} u_k - \sum_{k=3}^{n} u_k \\
&= \sum_{k=4}^{n}(u_k) + u_{n+1} - \left(u_3 + \sum_{k=4}^{n} u_k\right) = u_{n+1} - u_3.
\end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est convergente. Notons $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Avec cette notation, on a :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n - \ell}{1}\right) = 0.$$

Par définition, $f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$.
En appliquant cette définition, on peut dire que $u_n - \ell = o(1)$ et, en reprenant l'expression de u_n, on peut conclure que pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\boxed{\text{il existe un réel } \ell = \lim_{n\to\infty} u_n \text{ tel que } \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} = \ln\big(\ln(n)\big) + \ell + o(1)}.$$

B.III.2 On note $\big(\psi(n)\big)_{n\geqslant 2}$ la suite définie par $\psi(n) = \sum_{p\leqslant n} \dfrac{\ln(p)}{p}$. On considère un entier $n \geqslant 3$.

B.III.2.a On nous indique dans l'énoncé qu'on pourra remarquer que

$$\sum_{p\leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\delta(k)\ln(k)}{k} \cdot \frac{1}{\ln(k)},$$

où δ est la fonction caractéristique de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{N}$. On nous conseille ensuite d'utiliser la transformation d'Abel sous la forme suivante : si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites numériques et si pour $n \geqslant 1$, on pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, alors pour tout $N \geqslant 2$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}).$$

Considérons alors les deux suites numériques $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour tout entier $n \geqslant 1$ par

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{\delta(1)\ln(1)}{1} = \dfrac{\delta(1)\times 0}{1} = 0 \\ a_n = \dfrac{\delta(n)\ln(n)}{n} \text{ pour tout entier } n \geqslant 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_1 = 0 \text{ (on l'impose)} \\ b_n = \dfrac{1}{\ln(n)} \text{ pour tout } n \geqslant 2. \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Remarquons que si $n = 1$, alors on a $A_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = 0$ (par la définition ci-dessus). De plus, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta(k)\ln(k)}{k}.$$

Par définition de la fonction δ, si k est un nombre premier, alors $\delta(k)$ vaut 1 et 0 sinon. A_n s'écrit alors

$$A_n = \sum_{p\leqslant n} \frac{\ln(p)}{p} = \psi(n)$$

par définition de la suite $\big(\psi(n)\big)_{n\geqslant 2}$. Avec toutes les notations de l'énoncé, appliquons la transformation d'Abel : pour tout entier $N \geqslant 3$,

$$\sum_{p\leqslant N} \frac{1}{p} = \sum_{n=2}^{N} a_n b_n = A_N b_N + \sum_{n=2}^{N-1} A_n (b_n - b_{n+1}) = \psi(N)\frac{1}{\ln(N)} + \sum_{n=2}^{N-1} \psi(n)\left(\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right).$$

Observons que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)} = \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}.$$

On peut donc conclure que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a l'égalité

$$\boxed{\sum_{p\leqslant n} \frac{1}{p} = \frac{\psi(n)}{\ln(n)} + \sum_{k=2}^{n-1} \psi(k) \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}}.$$

B.III.2.b On va utiliser l'indication donnée dans l'énoncé. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} &\overset{(1)}{=} \frac{1}{\ln(k)} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln\left[k\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]} \overset{(2)}{=} \frac{1}{\ln(k)} \cdot \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)+\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{\ln(k)} \cdot \frac{\frac{1}{\ln(k)}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{\ln(k)}\left(\ln(k)+\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)} \\
&= \frac{1}{\ln(k)} \cdot \frac{\frac{1}{\ln(k)}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{1+\frac{1}{\ln(k)}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)},
\end{aligned}$$

où les égalités (1), (2), (3) s'expliquent par la factorisation dans $\ln(k+1)$ par k pour (1), par la formule $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ vraie pour tous $a, b > 0$ pour (2) et par la multiplication des numérateur et dénominateur par $\frac{1}{\ln(k)}$ afin d'obtenir 1 pour (3).

Considérons la suite $t(k)$ définie pour tout entier $k \geqslant 2$ par $t(k) = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)/\ln(k)$. On peut donc écrire l'égalité

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(k)} \cdot \frac{t(k)}{1+t(k)}.$$

Justifions à présent l'égalité

$$\frac{t(k)}{1+t(k)} = \frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{2k^2\ln(k)} + o\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right).$$

Observons que

$$\frac{t(k)}{1+t(k)} = \frac{1+t(k)-1}{1+t(k)} = \frac{1+t(k)}{1+t(k)} - \frac{1}{1+t(k)} = 1 - \frac{1}{1+t(k)}.$$

Évaluons $\lim_{k\to\infty} t(k)$ et pour cela, remarquons que

$$t(k) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)} = \frac{\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}\ln(k)} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} \cdot \frac{\frac{1}{k}}{\ln(k)} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Comme $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ et $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$, il vient $\lim_{k\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} = 1$. D'autre part, $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k\ln(k)} = 0$. Ces deux limites permettent de dire que $\lim_{k\to\infty} t(k) = 1 \times 0 = 0$.

Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $\frac{1}{1+u}$ s'écrit $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$. Comme $\lim_{k\to\infty} t(k) = 0$, on peut remplacer u par $t(k)$ dans ce développement et on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1+t(k)} = 1 - t(k) + t^2(k) + o\left(t^2(k)\right) \\
\Rightarrow\quad & \frac{t(k)}{1+t(k)} = 1 - \left(1 - t(k) + t^2(k) + o\left(t^2(k)\right)\right) = 1 - 1 + t(k) - t^2(k) - o\left(t^2(k)\right) \\
& \qquad\quad = t(k) - t^2(k) - o\left(t^2(k)\right).
\end{aligned}$$

Le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $\ln(1+u)$ s'écrit $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Comme $\lim_{k\to\infty} 1/k = 0$, on peut remplacer u par $1/k$ dans ce développement et on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Puisque $t(k) = \dfrac{1}{\ln(k)} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, il s'ensuit que

$$t(k) = \frac{1}{\ln(k)}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{2k^2\ln(k)} + o\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right).$$

Mais $\dfrac{t(k)}{1+t(k)} = t(k) - t^2(k) - o\big(t^2(k)\big)$. Donc :

$$\frac{t(k)}{1+t(k)} = \left(\frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{2k^2\ln(k)} + o\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right)\right) - t^2(k) - o\big(t^2(k)\big).$$

On a effectué une substitution d'un développement limité dans un autre. Simplifions cette écriture en observant que

$$t^2(k) = \frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln^2(k)}$$

et

$$\frac{t^2(k)}{\frac{1}{k^2\ln(k)}} = t^2(k)k^2\ln(k) = \frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln^2(k)}k^2\ln(k) = \frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\left(\frac{1}{k}\right)^2}\cdot\frac{1}{\ln(k)} = \left[\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\right]^2\cdot\frac{1}{\ln(k)}.$$

On sait déjà que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\right) = 1, \text{ donc } \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\right)^2 = 1.$$

Comme $\lim_{k\to\infty}\dfrac{1}{\ln(k)} = 0$, on voit que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{t^2(k)}{\frac{1}{k^2\ln(k)}}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(-\frac{t^2(k)}{\frac{1}{k^2\ln(k)}}\right) = 1\times 0 = 0.$$

Par théorème $f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$. On applique ce théorème pour affirmer que $-t^2(k) = o\big(\frac{1}{k^2\ln(k)}\big)$. De même, on vérifie que $-o\big(t^2(k)\big) = o\big(\frac{1}{k^2\ln(k)}\big)$. Ce qui permet d'écrire

$$\frac{t(k)}{1+t(k)} = \left(\frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{2k^2\ln(k)} + o\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right)\right) + o\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right) + o\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right),$$

d'où le résultat de l'indication :

$$\boxed{\frac{t(k)}{1+t(k)} = \frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{2k^2\ln(k)} + o\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right)}.$$

Utilisons maintenant le théorème de Mertens (question B.II.5) qui affirme que

$$\psi(k) = \sum_{p \leqslant k} \frac{\ln(p)}{p} = \ln(k) + O(1).$$

De plus, $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \dfrac{1}{\ln(k)} \cdot \dfrac{t(k)}{1+t(k)}$. Donc, en utilisant l'indication,

$$\psi(k)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \Big(\ln(k) + O(1)\Big) \cdot \frac{1}{\ln(k)} \cdot \left(\frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{2k^2\ln(k)} + o\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right)\right).$$

Développons ce produit :

$$\begin{aligned}\psi(k)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} &= \frac{1}{k\ln(k)} - \frac{1}{2k^2\ln(k)} + o\left(\frac{1}{k^2\ln(k)}\right)\\ &\quad + O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right) - O\left(\frac{1}{2k^2\ln^2(k)}\right) + O\left(\frac{1}{k^2\ln^2(k)}\right).\end{aligned}$$

On démontre que tous les termes, autres que $\frac{1}{k\ln(k)}$, sont dominés par $\frac{1}{k\ln^2(k)}$ $\Big($et donc aussi par $O\big(\frac{1}{k\ln^2(k)}\big)\Big)$. Nous pouvons donc conclure que

$$\boxed{\psi(k)\frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \frac{1}{k\ln(k)} + O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right)}.$$

B.III.3 En remplaçant l'égalité ci-dessus dans celle de la question B.III.2.a, on trouve pour $n \geqslant 3$,

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \frac{\psi(n)}{\ln(n)} + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k\ln(k)} + O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right)\right) = \frac{\psi(n)}{\ln(n)} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\ln(k)} + \sum_{k=2}^{n-1} O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right).$$

Par le théorème de Mertens (question B.II.5), nous savons que $\psi(n) = \ln(n) + O(1)$, soit en divisant par $\ln(n) > 0$,

$$\frac{\psi(n)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + O(1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)}{\ln(n)} + \frac{O(1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{O(1)}{\ln(n)}.$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{O(1)}{\ln(n)}\right) = 0$. La suite $\left(\dfrac{O(1)}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 3}$ est donc négligeable devant la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ de terme général $v_n = 1$, ce qui s'écrit aussi

$$\frac{O(1)}{\ln(n)} = o(1), \text{ d'où } \quad \frac{\psi(n)}{\ln(n)} = 1 + o(1).$$

On sait, d'après la question B.III.1.c, qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln(k)} = \ln\big(\ln(n)\big) + \ell + o(1).$$

Regardons ce qui se passe pour $\sum_{k=2}^{n-1} O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right)$ en posant $w_k = O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right)$ pour tout entier $k \geqslant 2$. Par définition donnée dans l'énoncé, la suite $(w_k)_{k\geqslant 2}$ est dominée par la suite $\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right)_{k\geqslant 2}$. Autrement dit, il existe un réel c et un entier k_0 tels que, pour tout entier $k \geqslant k_0$, on ait

$$|w_k| \leqslant c\left|\frac{1}{k\ln^2(k)}\right|.$$

Pour tout entier $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k\ln^2(k)} > 0$ implique $\left|\frac{1}{k\ln^2(k)}\right| = \frac{1}{k\ln^2(k)}$. L'inégalité précédente s'écrit alors

$$|w_k| \leqslant c\frac{1}{k\ln^2(k)}.$$

Nous avons démontré dans la question B.III.1.a que la série $\sum \frac{1}{k\ln^2(k)}$ est convergente. Il en est de même pour la série $\sum c\frac{1}{k\ln^2(k)}$. Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |w_k|$ est convergente, ou encore, la série $\sum w_k$ est absolument convergente.

Toute série absolument convergente est convergente. La série $\sum w_k$ est donc convergente vers un réel que nous noterons $L = \lim\limits_{n\to\infty} (\sum_{k=2}^{n-1} w_k)$. Alors

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n-1} w_k - L\right) = 0,$$

ce qui s'écrit aussi $\sum_{k=2}^{n-1} w_k - L = o(1)$.

Faisons un bilan : on a

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p} = \frac{\psi(n)}{\ln(n)} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\ln(k)} + \sum_{k=2}^{n-1} O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right),$$

avec

$$\frac{\psi(n)}{\ln(n)} = 1 + o(1), \quad \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\ln(k)} = \ln\big(\ln(n)\big) + \ell + o(1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{n-1} O\left(\frac{1}{k\ln^2(k)}\right) = L + o(1).$$

En reportant, on trouve finalement

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p} = 1 + o(1) + \ln\big(\ln(n)\big) + \ell + o(1) + L + o(1) = \ln\big(\ln(n)\big) + \ell + L + 1 + o(1).$$

En posant $\lambda = \ell + L + 1$, on obtient bien la relation demandée : pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\boxed{\text{il existe une constante réelle } \lambda = \ell + L + 1 \text{ telle que } \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p} = \ln\big(\ln(n)\big) + \lambda + o(1)}.$$

B.III.4 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. L'énoncé nous dit que δ est la fonction caractéristique de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\delta(n)$ vaut 1 si n est un nombre premier, et 0 sinon. On peut donc écrire

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n}\frac{\delta(k)}{k}.$$

De plus, l'énoncé nous dit aussi que $\delta(k) = \pi(k) - \pi(k-1)$. En reportant, on trouve

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\pi(k) - \pi(k-1)}{k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{\pi(k)}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{\pi(k-1)}{k}.$$

Effectuons le changement d'indices $i = k-1$, dans quel cas $k = i+1$. Si $k = 2$, alors $i = 2-1 = 1$ et si $k = n$, alors $i = n-1$. Nous pouvons donc écrire (i étant une variable muette pouvant être remplacée par k) que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\pi(k-1)}{k} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\pi(i)}{i+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k+1}.$$

Mais

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\pi(n)}{k} = \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\pi(n)}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k+1} = \frac{\pi(1)}{1+1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k+1} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k+1},$$

car l'énoncé assure la valeur $\pi(1) = 0$. En reportant ces résultats, on trouve alors

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\pi(n)}{k} - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k+1} = \frac{\pi(n)}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{\pi(n)}{k} - \frac{\pi(k)}{k+1} \right).$$

Observons que

$$\frac{\pi(n)}{k} - \frac{\pi(k)}{k+1} = \frac{(k+1)\pi(k) - k\pi(k)}{k(k+1)} = \frac{(k+1-k)\pi(k)}{k(k+1)} = \frac{\pi(k)}{k(k+1)}.$$

Nous aboutissons au résultat demandé :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 2, \text{ on a } \sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\pi(k)}{k(k+1)} + \frac{\pi(n)}{n}}.$$

Il s'agit maintenant d'en déduire le théorème de Tchebychev. Supposons pour cela qu'il existe une constante réelle $c > 0$ telle que $\pi(n) \sim cn/\ln(n)$. Il vient :

$$\frac{\pi(n)}{n} \sim \frac{c}{\ln(n)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi(n)}{n(n+1)} \sim \frac{c}{(n+1)\ln(n)}.$$

Remarquons que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{c}{(n+1)\ln(n)}}{\frac{c}{n\ln(n)}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c}{(n+1)\ln(n)} \cdot \frac{n\ln(n)}{c} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} \right) = 1,$$

ce qui nous permet de dire que $\dfrac{c}{(n+1)\ln(n)} \sim \dfrac{c}{n\ln(n)}$. Par transitivité des relations d'équivalences,

$$\frac{\pi(n)}{n(n+1)} \sim \frac{c}{n\ln(n)}, \text{ ce qui s'écrit aussi (en termes de limite)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{\pi(n)}{n(n+1)}}{\frac{c}{n\ln(n)}} \right) = 1.$$

Les séries $\sum \frac{\pi(n)}{n(n+1)}$ et $\sum \frac{c}{n\ln(n)}$ sont à termes strictement positifs. La résultat de la question B.III.1.a nous assure que la série $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ est divergente. Par suite, la série $\sum \frac{c}{n\ln(n)}$ a le même caractère divergent. Énonçons le théorème de comparaison des sommes partielles de deux séries divergentes à termes positifs :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs. On suppose que la série de terme général v_n diverge et qu'il existe un nombre réel ℓ tel que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u_n}{v_n}\right)=\ell$. Alors on a

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}u_k}{\sum_{k=1}^{n}v_k}\right)=\ell.$$

On peut appliquer ce théorème à $u_n=\frac{\pi(n)}{n(n+1)}$, $v_n=\frac{c}{n\ln(n)}$ et $\ell=1$ pour en déduire la limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}}{\sum_{k=2}^{n}\frac{c}{k\ln(k)}}\right)=1.$$

Autrement dit,

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}\sim\sum_{k=2}^{n}\frac{c}{k\ln(k)}\quad\overset{\text{B.III.1.c}}{\Leftrightarrow}\quad\sum_{k=2}^{n}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}\sim c\Big(\ln\big(\ln(n)\big)+\ell+o(1)\Big).$$

Observons que

$$\frac{c\Big(\ln\big(\ln(n)\big)+\ell+o(1)\Big)}{c\ln\big(\ln(n)\big)}=\frac{\ln\big(\ln(n)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)}+\frac{\ell+o(1)}{\ln\big(\ln(n)\big)}=1+\frac{\ell+o(1)}{\ln\big(\ln(n)\big)}.$$

Comme $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ell+o(1)}{\ln\big(\ln(n)\big)}\right)=0$, il vient $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{c\Big(\ln\big(\ln(n)\big)+\ell+o(1)\Big)}{c\ln\big(\ln(n)\big)}\right)=1+0=1$, ce qui s'écrit aussi

$$c\Big(\ln\big(\ln(n)\big)+\ell+o(1)\Big)\sim c\ln\big(\ln(n)\big).$$

Par transitivité des relations d'équivalence, on a

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}\sim c\ln\big(\ln(n)\big),\text{ ce qui s'écrit aussi}\quad\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=2}^{n}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}}{c\ln\big(\ln(n)\big)}\right)=1.$$

Rappelons que

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}+\frac{\pi(n)}{n},\text{ impliquant}\quad\frac{\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}}{c\ln\big(\ln(n)\big)}=\frac{\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}}{c\ln\big(\ln(n)\big)}+\frac{\frac{\pi(n)}{n}}{c\ln\big(\ln(n)\big)}.$$

De plus,

$$\frac{\pi(n)}{n}\sim\frac{c}{\ln(n)}$$

(par hypothèse du théorème de Tchebychev), d'où

$$\frac{\frac{\pi(n)}{n}}{c\ln\big(\ln(n)\big)}\sim\frac{\frac{c}{\ln(n)}}{c\ln\big(\ln(n)\big)},\text{ avec}\quad\frac{\frac{c}{\ln(n)}}{c\ln\big(\ln(n)\big)}=\frac{c}{\ln(n)}\,\frac{1}{c\ln\big(\ln(n)\big)}=\frac{1}{\ln(n)\ln\big(\ln(n)\big)}.$$

Par proposition, si $f\sim g$ avec $\lim_{x\to\infty}g(x)=\ell$, alors $\lim_{x\to\infty}f(x)=\ell$. Comme $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)\ln\big(\ln(n)\big)}\right)=0$, en appliquant cette proposition, on trouve

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi(n)}{n}}{c\ln\big(\ln(n)\big)}\right)=0.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}}{c\ln\big(\ln(n)\big)}\right)=1+0=1,\text{ ce qui se traduit par}\quad \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\sim c\ln\big(\ln(n)\big).$$

Enfin, grâce à la question B.III.3, on peut écrire que

$$\frac{\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}}{\ln\big(\ln(n)\big)}=\frac{\ln\big(\ln(n)\big)+\lambda+o(1)}{\ln\big(\ln(n)\big)}=1+\frac{\lambda+o(1)}{\ln\big(\ln(n)\big)}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda+o(1)}{\ln\left(\ln(n)\right)}\right)=0$, il vient

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\displaystyle\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}}{\ln\big(\ln(n)\big)}\right)=1+0=1,\text{ ce qui se traduit par}\quad \sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}\sim \ln\big(\ln(n)\big).$$

Par transitivité des relations d'équivalences, il vient

$$\ln\big(\ln(n)\big)\sim c\ln\big(\ln(n)\big)\quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c\ln\big(\ln(n)\big)}{\ln\big(\ln(n)\big)}\right)=1,$$

soit $\lim\limits_{n\to\infty}c=1$, d'où $c=1$.

Nous venons d'établir, dans cette partie B.III, le théorème de Tchebychev, qui s'énoncé ainsi

$$\boxed{\text{S'il existe une constante réelle } c>0 \text{ telle que } \pi(n)\sim c\,\frac{n}{\ln(n)},\text{ alors nécessairement } c=1}.$$

La partie B.IV est une application de la formule asymptotique trouvée dans la partie B.III. On y étudie la densité de l'ensemble des entiers possédant de grands facteurs communs.

IV Une application à l'étude des entiers possédant de grands facteurs premiers

B.IV.1 Soit $n\geqslant 2$ un entier. Observons que

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{p<\sqrt{n}}\frac{1}{p}+\sum_{\sqrt{n}\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{p}\quad\Rightarrow\quad \sum_{\sqrt{n}\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}-\sum_{p<\sqrt{n}}\frac{1}{p}.$$

Rappelons que la partie entière $\left[\sqrt{n}\right]$ de $\sqrt{n}$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$. On peut donc écrire

$$\sum_{p<\sqrt{n}}\frac{1}{p}=\sum_{p\leqslant[\sqrt{n}]}\frac{1}{p},\text{ d'où}\quad \sum_{\sqrt{n}\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{p}=\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}-\sum_{p\leqslant[\sqrt{n}]}\frac{1}{p}.$$

Appliquons le résultat de la question B.III.3 aux entiers n et $\left[\sqrt{n}\right]$: on trouve

$$\sum_{p\leqslant n}\frac{1}{p}=\ln\left(\ln(n)\right)+\lambda+o(1)\qquad\text{et}\qquad\sum_{p\leqslant[\sqrt{n}]}\frac{1}{p}=\ln\left(\ln([\sqrt{n}])\right)+\lambda+o(1).$$

Ainsi

$$\sum_{\sqrt{n}\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{p}=\left(\ln\left(\ln(n)\right)+\lambda+o(1)\right)-\left(\ln\left(\ln([\sqrt{n}])\right)+\lambda+o(1)\right)=\ln\left(\ln(n)\right)-\ln\left(\ln([\sqrt{n}])\right)+o(1).$$

$\left[\sqrt{n}\right]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant $\left[\sqrt{n}\right]\leqslant\sqrt{n}\leqslant\left[\sqrt{n}\right]+1$, il peut donc être encadré sous la forme $\sqrt{n}-1\leqslant\left[\sqrt{n}\right]\leqslant\sqrt{n}$. La fonction $x\mapsto\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, ce qui permet d'écrire successivement

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\sqrt{n}-1\right)\leqslant\ln\left(\left[\sqrt{n}\right]\right)\leqslant\ln\left(\sqrt{n}\right)\\
\Rightarrow\quad&\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}-1\right)\right)\leqslant\ln\left(\ln\left(\left[\sqrt{n}\right]\right)\right)\leqslant\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)\\
\Leftrightarrow\quad&-\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}-1\right)\right)\geqslant-\ln\left(\ln\left(\left[\sqrt{n}\right]\right)\right)\geqslant-\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)\\
\Leftrightarrow\quad&\ln\left(\ln(n)\right)-\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}-1\right)\right)\geqslant\ln\left(\ln(n)\right)-\ln\left(\ln\left(\left[\sqrt{n}\right]\right)\right)\geqslant\ln\left(\ln(n)\right)-\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Comme $\sqrt{n}=n^{1/2}$ et $\ln(a^p)=p\ln(a)$ pour tout $a>0$ et tout $p\in\mathbb{R}$, il vient

$$\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)=\ln\left(\ln(n^{1/2})\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\ln(n)\right)=\ln\left(\frac{\ln(n)}{2}\right)=\ln\left(\ln(n)\right)-\ln(2).$$

D'où

$$\ln\left(\ln(n)\right)-\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)=\ln\left(\ln(n)\right)-\left(\ln\left(\ln(n)\right)-\ln(2)\right)=\ln(2).$$

De plus, $\sqrt{n}-1=\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, d'où $\ln\left(\sqrt{n}-1\right)=\ln\left(\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=\ln\left(\sqrt{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Mais

$$\ln\left(\sqrt{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\ln\left(\sqrt{n}\right)\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{n}\right)}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}-1\right)\right)&=\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)=\ln\left[\ln\left(\sqrt{n}\right)\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{n}\right)}\right)\right]\\
&=\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)+\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{n}\right)}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ln\left(\ln(n)\right)-\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}-1\right)\right)=\ln\left(\ln(n)\right)-\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)-\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{n}\right)}\right).$$

Or $\ln\left(\ln(n)\right)-\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}\right)\right)=\ln(2)$. Il s'ensuit que

$$\ln\left(\ln(n)\right)-\ln\left(\ln\left(\sqrt{n}-1\right)\right)=\ln(2)-\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln\left(\sqrt{n}\right)}\right).$$

Nous pouvons donc encadrer $\ln\big(\ln(n)\big)-\ln\Big(\ln\big([\sqrt{n}]\big)\Big)$ sous la forme :

$$\ln(2)\leqslant \ln\big(\ln(n)\big)-\ln\Big(\ln\big([\sqrt{n}]\big)\Big)\leqslant \ln(2)-\ln\left(1+\frac{\ln\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)}{\ln\big(\sqrt{n}\big)}\right).$$

Observons que

$$\frac{\ln\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)}{\ln\big(\sqrt{n}\big)}=\frac{\ln\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)}{-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(-\sqrt{n}^2\ln\big(\sqrt{n}\big)\Big)}=\frac{\ln\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)}{-\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(-\frac{1}{n\ln\big(\sqrt{n}\big)}\right).$$

On sait que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1.\quad \overset{\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=0}{\Rightarrow}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)}{-\frac{1}{\sqrt{n}}}=1,$$

et puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n\ln\big(\sqrt{n}\big)}\right)=0$, il vient $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)}{\ln\big(\sqrt{n}\big)}=1\times 0=0$. Par suite,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{\ln\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)}{\ln\big(\sqrt{n}\big)}\right)\right]=\ln(1+0)=\ln(1)=0.$$

En appliquant le théorème des gendarmes à la double-inégalité

$$\ln(2)\leqslant \ln\big(\ln(n)\big)-\ln\big(\ln([\sqrt{n}])\big)\leqslant \ln(2)-\ln\left(1+\frac{\ln\big(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\big)}{\ln\big(\sqrt{n}\big)}\right),$$

on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\big(\ln(n)\big)-\ln\big(\ln([\sqrt{n}])\big)\right]=\ln(2).$$

Rappelons que $\displaystyle\sum_{\sqrt{n}\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{p}=\ln\big(\ln(n)\big)-\ln\big(\ln([\sqrt{n}])\big)+o(1)$. Nous pouvons donc conclure que

$$\boxed{\text{la suite }\left(\sum_{\sqrt{n}\leqslant p\leqslant n}\frac{1}{p}\right)_n\text{ converge et sa limite vaut }\ln(2)}.$$

B.IV.2 Étant donné un entier $n\geqslant 2$, on note $P^+(n)$ le plus grand facteur premier apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de n. Considérons l'ensemble A des entiers $n\geqslant 2$ vérifiant l'inégalité $P^+(n)>\sqrt{n}$. Pour tout réel $x\geqslant 2$, on pose $A(x)=A\cap[0,x]$.

B.IV.2.a Soient $p\in\mathscr{P}$ et $m\in\mathbb{N}^*$ tels que $n=mp$.

"$\Rightarrow$" : On suppose que $p=P^+(n)$ et $n\in A(x)$. Comme $n\in A(x)$ et $A(x)=A\cap[0,x]$, on a $n\in A$ <u>et</u> $n\in[0,x]$. A est l'ensemble des entiers $n\geqslant 2$ tels que $P^+(n)>\sqrt{n}$. Mais $p=P^+(n)$, donc $p>\sqrt{n}$. La fonction $x\mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, ce qui implique $p^2>\sqrt{n}^2=n$, et par suite, $p^2/p=p>n/p$. Or $n=mp$, ou encore $n/p=m$. On a ainsi l'inégalité $p>m$.

De plus, $n \in [0,x]$, ce qui se traduit par $n \leqslant x$. Avec $n = mp$, il vient $mp \leqslant x$, d'où l'inégalité $p \leqslant x/m$. Au final,

$$\text{si } p = P^+(n) \text{ et } n \in A(x), \text{ alors on a la double-inégalité } m < p \leqslant \frac{x}{m}.$$

"$\Leftarrow$" : Réciproquement, supposons que la double-inégalité $m < p \leqslant \frac{x}{m}$ est vérifiée. On va alors montrer que $p = P^+(n)$. Puisque $n = mp$, on peut dire que p est un diviseur premier de n. Nous voulons montrer que p est le plus grand facteur premier apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de n. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un diviseur premier q de n tel que $q > p$. Puisque $n = mp$ et q divise n, *a fortiori*, q divise mp. p et q sont premiers entre eux car ce sont tous deux des nombres premiers de $\mathscr{P}$. D'après le théorème de Gauss (rappelé page 8), q divise alors l'entier m. Autrement dit, il existe un entier $r \neq 0$ tel que $m = qr$. Alors $n = mp = qrp$. Comme $q > p$, il s'ensuit $qrp > rp^2$. On a supposé que $m < p$, c'est-à-dire $n/p < p$, ou encore $n < p^2$. Ce qui implique $rp^2 > rn$.

Récapitulons : $n = qrp > rp^2 > rn$. En divisant par n dans les inégalités, on obtient $1 > r$, ce qui est impossible car $r \in \mathbb{N}^*$. Nous avons obtenu une contradiction, ce qui permet d'affirmer que l'hypothèse "$q \in \mathscr{P}$ tel que $q > p$" est fausse. Donc tout diviseur premier de n est inéfrieur ou égal à p, ce qui prouve que $p = P^+(n)$.

Montrons alors que $n \in A(x)$: nous avons supposé que $p \leqslant \frac{x}{m}$, ce qui s'écrit aussi $n = pm \leqslant x$. Cette inégalité justifie que $n \in [0,x]$. De plus, comme $m < p$, on a $n = mp < p^2$. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, ce qui permet d'écrire $\sqrt{n} < \sqrt{p^2} = p$. Mais $p = P^+(n)$, donc $P^+(n) > \sqrt{n}$, c'est-à-dire $n \in A$. Puisque $n \in [0,x]$ et $n \in A$, on a $n \in A \cap [0,x] = A(x)$. Nous venons en tout de démontrer que

$$\text{si } m < p \leqslant \frac{x}{m}, \text{ alors } p = P^+(n) \text{ et } n \in A(x).$$

Nous pouvons donc en conclure l'équivalence suivante :

$$\boxed{\big(p = P^+(n) \text{ et } n \in A(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad m < p \leqslant \frac{x}{m}}.$$

B.IV.2.b Soient $p, p' \in \mathscr{P}$ et $m, m' \in \mathbb{N}^*$ tels que $m < p \leqslant \frac{x}{m}$ et $m' < p' \leqslant \frac{x}{m'}$.

"$\Rightarrow$" : On suppose tout d'abord que $mp = m'p'$. Vérifions que $p = p'$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant $p \neq p'$ et en prenant par exemple $p < p'$. L'égalité $mp = m'p'$ permet de dire que p divise $m'p'$. p et p' sont premiers entre eux car ils appartiennent à $\mathscr{P}$. En appliquant le théorème de Gauss, on peut affirmer que p divise m'. Ce qui implique l'inégalité $p \leqslant m'$, et ceci contredit l'inégalité de départ $m' < p$.

En obtenant une contradiction, nous pouvons affirmer que l'hypoyhèse "$p \neq p'$" est fausse. Par principe du raisonnement par l'absurde, on a donc $p = p'$. Mais alors l'égalité $mp = m'p'$ s'écrit $mp = m'p$, soit, en divisant par p non nul, $m = m'$. Nous venons de montrer que

$$\text{si } mp = m'p', \text{ alors } \big(p = p' \text{ et } m = m'\big).$$

"$\Leftarrow$" : La réciproque est claire. Supposons $p = p'$ et $m = m'$. Comme $p = p'$, on a $mp = mp'$. Et comme $m = m'$, cette égalité devient $mp = m'p'$.

Nous avons bien montré l'équivalence

$$\boxed{mp = m'p' \quad \Leftrightarrow \quad \left(p = p' \text{ et } m = m'\right)}.$$

B.IV.2.c Considérons l'ensemble $B = \left\{(m,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathscr{P} \mid m < p \leqslant \frac{x}{m}\right\}$ et considérons l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & B & \longrightarrow & A(x) \\ & (m,p) & \longmapsto & mp. \end{array}$$

Il s'agit de démontrer que l'application ψ est bijective.

D'après la question précédente, on a l'équivalence $mp = m'p' \Leftrightarrow \left(p = p' \text{ et } m = m'\right)$. On en tire que, si $\psi(m,p) = \psi(m',p')$, alors $(m,p) = (m',p')$, ce qui signifie que ψ est injective.

Soit maintenant un entier n de $A(x)$. Par définition de $A(x)$, n appartient à A, ce qui signifie que $n \geqslant 2$ et $P^+(n) > \sqrt{n}$. $P^+(n)$ est le plus grand facteur premier apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de n, il existe donc un nombre $p \in \mathscr{P}$ tel que $p = P^+(n)$. Comme p divise n, il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $n = mp$. Donc, $p = P^+(n)$ et $n \in A(x)$, ce qui est équivalent, d'après la question B.IV.2.a, à la double-inégalité $m < p \leqslant x/m$. Nous venons de montrer que, pour tout entier n de $A(x)$, il existe $(m,p) \in B$ tel que $n = \psi(m,p)$. L'application ψ est ainsi surjective.

Comme l'application ψ est à la fois injective et surjective, elle réalise une bijection de B dans $A(x)$. Autrement dit,

les entiers de la forme mp avec $p \in \mathscr{P}$, $m \in \mathbb{N}^*$ et vérifiant $m < p \leqslant \dfrac{x}{m}$ décrivent de manière biunivoque l'ensemble $A(x)$.

B.IV.2.d Soit x un réel supérieur ou égal à 2 et posons $a(x) = \sharp A(x)$ le cardinal de $A(x)$. S'il existe une bijection entre deux ensembles finis, alors ces ensembles ont même cardinal. Nous venons de montrer qu'il existe une bijection ψ entre B et $A(x)$. Donc

$$a(x) = \sharp A(x) = \sharp B = \sharp \left\{(m,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathscr{P} \mid m < p \leqslant \frac{x}{m}\right\}.$$

On se donne un nombre premier p dans $\mathscr{P}$ et on pose $B_p = \left\{m \in \mathbb{N}^* \mid m < p \leqslant x/m\right\}$. Ainsi, il y a autant d'entiers m tels que $(m,p) \in B$ que d'entiers $m \in B_p$, ce qui permet d'écrire

$$\sharp B = \sum_{p \in \mathscr{P}} \sharp B_p.$$

Montrons que p doit être un nombre premier inférieur ou égal à x. On raisonne par l'absurde en supposant que $p > x$. Si $m \in \mathbb{N}^*$ vérifie la double-inégalité $m < p \leqslant x/m$, alors $x < p \leqslant x/m$, soit en multipliant par $m/x > 0$, $m < pm/x \leqslant 1$, d'où on tire $m < 1$. Ceci est absurde, car $m \in \mathbb{N}^*$. En obtenant cette contradiction, nous pouvons dire que l'hypothèse "$p > x$" est fausse et affirmer que $p \in \mathscr{P}$ et $p \leqslant x$.

Ainsi,

$$\sharp B = \sum_{p \leqslant x} \sharp B_p.$$

De plus, si $p \in \mathscr{P}$ et $m \in B_p$, alors m vérifie la double-inégalité $m < p \leqslant x/m$, c'est-à-dire ($m < p$ et $p \leqslant x/m$), ou encore ($m < p$ et $m \leqslant x/p$). Comme $[x/p]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x/p et $m-1$ le plus grand entier inférieur ou égal à p, il s'ensuit que

$$\sharp B_p = \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right), \text{ d'où } \quad \sharp B = \sum_{p \leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right).$$

Comme $a(x) = \sharp B$, nous avons ainsi montré que

$$\boxed{a(x) = \sum_{p \leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right).}$$

B.IV.3 Soit $x \geqslant 1$ un réel.

B.IV.3.a Soit p un nombre premier.

"⇒" : Supposons tout d'abord qu'on a l'inégalité $p-1 \leqslant [x/p]$. Par définition, $[x/p]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ tel que $[x/p] \leqslant x/p$. Par transitivité des relations d'ordre, on a $p-1 \leqslant x/p$. Comme $p \geqslant 2$, on peut multiplier chaque membre par p pour obtenir $p(p-1) \leqslant x$, ou encore $p^2 - p - x \leqslant 0$. Considérons le trinôme P défini pour tout réel y par $P(y) = y^2 - y - x$. Le discriminant Δ de ce trinôme est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1(-x) = 1 + 4x$. Nous savons que $x \geqslant 1$, d'où $4x \geqslant 4$ et par suite $4x + 1 \geqslant 5$. Ainsi $\Delta > 0$, ce qui implique que le trinôme P admet deux racines réelles données par

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{-(-1)+\sqrt{1+4x}}{2\times 1} = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \quad \text{et} \\ y_2 &= \frac{-(-1)-\sqrt{1+4x}}{2\times 1} = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}. \end{aligned}$$

Par propriété, P est du signe opposé au signe du coefficient de y^2 entre ses deux racines y_1 et y_2. Comme $1 > 0$, on en déduit que si $P(y) \leqslant 0$, alors $y_2 \leqslant y \leqslant y_1$.

Observons que $4x+1 \geqslant 5$ implique $\sqrt{4x+1} \geqslant \sqrt{5}$, car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. D'où $-\sqrt{4x+1} \leqslant -\sqrt{5}$ et $1-\sqrt{4x+1} \leqslant 1-\sqrt{5}$, ou encore

$$\frac{1-\sqrt{4x+1}}{2} \leqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ car } \sqrt{5} > 1.$$

On en tire $y_2 < 0$. L'inégalité $p^2 - p - x \leqslant 0$ se traduit alors par $P(p) \leqslant 0$, ce qui implique que $y_2 \leqslant p \leqslant y_1$. En posant $y_1 = \varphi(x)$, on obtient finalement que

$$\text{si } p-1 \leqslant \left[\frac{x}{p}\right], \text{ alors } p \leqslant \varphi(x).$$

"⇐" : Réciproquement, supposons qu'on a l'inégalité $p \leqslant \varphi(x)$. On a alors successivement

$$p \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} \quad \Rightarrow \quad 2p \leqslant 1+\sqrt{1+4x} \quad \Rightarrow \quad 2p-1 \leqslant \sqrt{1+4x}.$$

p étant un nombre premier, on a $p \geqslant 2$, soit $2p \geqslant 4$, d'où $2p-1 \geqslant 3$: $2p-1$ est toujours positif. La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Si $0 < 2p-1 \leqslant \sqrt{1+4x}$, alors $(2p-1)^2 \leqslant \sqrt{1+4x}^2 = |1+4x|$. Mais $1+4x \geqslant 5$, donc $|1+4x| = 1+4x$. L'inégalité devient

$$\begin{aligned}(2p-1)^2 \leqslant 1+4x \quad &\Rightarrow \quad 4p^2-4p+1 \leqslant 1+4x \quad \Rightarrow \quad 4p^2-4p \leqslant 4x \\ &\Rightarrow \quad p^2-p \leqslant x \quad \Rightarrow \quad p(p-1) \leqslant x \quad \overset{p\geqslant 2}{\Rightarrow} \quad p-1 \leqslant \frac{x}{p}.\end{aligned}$$

$[x/p]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant $x/p < [x/p]+1$. Par transitivité des relations d'ordre, il vient $p-1 < [x/p]+1$, soit $p-2 < [x/p]$, ou encore $p-1 \leqslant [x/p]$. Nous avons ainsi montré que

$$\text{si } p \leqslant \varphi(x), \text{ alors } p-1 \leqslant \left[\frac{x}{p}\right].$$

L'équivalence suivante est ainsi démontrée :

$$\boxed{p-1 \leqslant \left[\frac{x}{p}\right] \quad \Leftrightarrow \quad p \leqslant \varphi(x)}.$$

B.IV.3.b Soit $x \geqslant 1$ un réel. On a

$$\varphi(x) = \frac{1+\sqrt{1+4x}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2} > \frac{\sqrt{1+4x}}{2} \qquad \left(\text{car } \frac{1}{2} > 0\right).$$

De plus, $1 > 0$ implique $1+4x > 4x \geqslant 4$ (car $x \geqslant 1$). La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc $\sqrt{1+4x} > \sqrt{4x} = 2\sqrt{x}$, ou encore $\sqrt{1+4x}/2 > 2\sqrt{x}/2 = \sqrt{x}$. On a ainsi, par transitivité des relations d'ordre, l'inégalité $\sqrt{x} < \varphi(x)$.

Vérifions à présent l'inégalité $\varphi(x) < \sqrt{x}+1$. Cette inégalité est équivalente à $\left(1+\sqrt{1+4x}\right)/2 < \sqrt{x}+1$ et, successivement, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}1+\sqrt{1+4x} < 2\sqrt{x}+2 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+4x} < 2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow |1+4x| = 1+4x < \left(2\sqrt{x}+1\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1+4x < 4|x|+4\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 0 < 4\sqrt{x}.\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie pour tout réel $x \geqslant 1$. En reprenant ces équivalences depuis la dernière inégalité, on arrive au résultat demandé : $\varphi(x) < \sqrt{x}+1$.

Nous avons ainsi vérifié la double-inégalité

$$\boxed{\sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x}+1}.$$

B.IV.3.c On nous propose d'examiner le cas où il existe un nombre premier dans l'intervalle $\left]\sqrt{x}, \varphi(x)\right]$ et le cas où il n'en existe pas. Soit x un réel supérieur ou égal à 2 $\big($car $A(x)$ est défini pour tout réel $x \geqslant 2\big)$. Nous avons prouvé, dans la question B.IV.2.d, que

$$a(x) = \sum_{p \leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right),$$

ce qu'on peut décomposer sous la forme

$$a(x) = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) + \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right).$$

D'après la question précédente, on a l'inégalité $\sqrt{x} < \varphi(x)$. Si $p \leqslant \sqrt{x}$ et $\sqrt{x} < \varphi(x)$, par transitivité des relations d'ordre, on a $p < \varphi(x)$, ce qui implique $p \leqslant \varphi(x)$. Cette inégalité est équivalente à $p-1 \leqslant [x/p]$ (résultat de la question B.IV.3.a). Ce qui permet de dire que si $p \leqslant \sqrt{x}$, alors

$$\min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = p-1 \quad \text{et} \quad \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} (p-1).$$

Évaluons alors la somme $\displaystyle\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right)$ en distinguant les deux cas proposés.

Remarquons que

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant\varphi(x)} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) + \sum_{\varphi(x)<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right).$$

Premier cas : On suppose qu'il n'existe pas de nombre premier dans l'intervalle $\left]\sqrt{x}, \varphi(x)\right]$. Dans ce cas, la première somme du membre de gauche est vide car elle ne contient aucun terme, de sorte que

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \sum_{\varphi(x)<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right).$$

L'équivalence montrée dans la question B.IV.3.a permet d'affirmer que si $\varphi(x) < p$, alors $[x/p] < p-1$, ce qui implique que si $\varphi(x) < p$, alors $\min\big(p-1, [x/p]\big) = [x/p]$. Ainsi,

$$\sum_{\varphi(x)<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \sum_{\varphi(x)<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right],$$

ou mieux encore, ce que l'on veut (la seconde somme débute à $\sqrt{x}$ au lieu de $\varphi(x)$, mais cela ne change rien puisqu'il n'y a par hypothèse aucune nombre premier p dans l'intervalle $\left]\sqrt{x}, \varphi(x)\right]$) :

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right].$$

Deuxième cas : On suppose qu'il existe un nombre premier dans l'intervalle $\left]\sqrt{x}, \varphi(x)\right]$, que nous allons noter p_0. Celui-ci est unique, puisque $\sqrt{x} < \varphi(x) < \sqrt{x}+1$ d'après la question précédente : il y a au plus un seul entier entre $\sqrt{x}$ et $\sqrt{x}+1$. On peut alors écrire :

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant\varphi(x)} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \min\left(p_0-1, \left[\frac{x}{p_0}\right]\right).$$

D'après la question B.IV.3.a, si $p_0 \leqslant \varphi(x)$, alors $p_0 - 1 \leqslant [x/p_0]$, donc si $p_0 \leqslant \varphi(x)$, alors $\min\big(p_0-1, [x/p_0]\big) = p_0 - 1$. Ainsi,

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant\varphi(x)} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = p_0 - 1.$$

Vérifions à présent que $p_0 - 1 = [x/p_0]$. On sait que $p_0 > \sqrt{x}$, donc $p_0{}^2 > \sqrt{x}^2 = |x| = x$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[$). D'où $p_0 > x/p_0$ car $p_0 \neq 0$, ou encore $p_0 - 1 > x/p_0 - 1$. De plus, $p_0 - 1 \leqslant [x/p_0]$ et $[x/p_0]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$

vérifiant $[x/p_0] \leqslant x/p_0$. Par transitivité des relations d'ordre, on a $p_0 - 1 \leqslant x/p_0$, ce qui établit que $p_0 - 1$ est un élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant $x/p_0 - 1 < p_0 - 1 \leqslant x/p_0$. Par définition de la partie entière d'un réel, on a $p_0 - 1 = [x/p_0]$. Il vient alors que

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant\varphi(x)} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = p_0 - 1 = \left[\frac{x}{p_0}\right].$$

De plus, on sait déjà que

$$\sum_{\varphi(x)<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \sum_{\varphi(x)<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right].$$

Finalement, en reportant les résultat trouvés ci-dessus dans l'égalité précédant les deux cas, on obtient

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \left[\frac{x}{p_0}\right] + \sum_{\varphi(x)<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right].$$

On trouve exactement le même résultat que dans le premier cas.

<u>Faisons un bilan des résultats</u> : On a

$$a(x) = \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) + \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right),$$

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} (p-1) \qquad \text{et}$$

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \min\left(p-1, \left[\frac{x}{p}\right]\right) = \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right].$$

Nous pouvons en conclure la relation demandée :

$$\boxed{a(x) = \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} (p-1) + \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right]}.$$

B.IV.3.d Soit x un réel supérieur ou égal à 2. On peut écrire

$$0 \leqslant \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} (p-1) \leqslant \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \sqrt{x} = \sqrt{x} \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} 1.$$

Il y a donc autant de termes 1 dans la dernière somme qu'il y a de nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{x}$. Le nombre de nombres premiers compris dans l'intervalle $\big[0, [\sqrt{x}]\big]$ se note $\pi\big([\sqrt{x}]\big)$ (d'après l'éconcé). Donc

$$0 \leqslant \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} (p-1) \leqslant \sqrt{x}\,\pi\big([\sqrt{x}]\big).$$

Nous avons démontré, dans la question A.II.3 que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$\pi(n) \leqslant \mathrm{e}\frac{n}{\ln(n)}.$$

En particulier, pour x suffisamment grand (c'est-à-dire au moins supérieur ou égal à 3), et en posant $n = [\sqrt{x}]$, on a

$$0 \leqslant \pi\left([\sqrt{x}]\right) \leqslant \mathrm{e}\,\frac{[\sqrt{x}]}{\ln\left([\sqrt{x}]\right)}.$$

De plus, $[\sqrt{x}]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant $[\sqrt{x}] < \sqrt{x} \leqslant [\sqrt{x}]+1$, soit $\sqrt{x}-1 \leqslant [\sqrt{x}]$, d'où $\ln\left(\sqrt{x}-1\right) \leqslant \ln\left([\sqrt{x}]\right)$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$. Et, par stricte décroissance de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $]0,+\infty[$, on a

$$\frac{1}{\ln\left(\sqrt{x}-1\right)} \geqslant \frac{1}{\ln\left([\sqrt{x}]\right)} \overset{\mathrm{e}[\sqrt{x}]>0}{\Leftrightarrow} \frac{\mathrm{e}\,[\sqrt{x}]}{\ln\left(\sqrt{x}-1\right)} \geqslant \frac{\mathrm{e}\,[\sqrt{x}]}{\ln\left([\sqrt{x}]\right)}.$$

Mais $[\sqrt{x}] \leqslant \sqrt{x}$ implique, puisque $\mathrm{e}/\ln\left(\sqrt{x}-1\right) > 0$,

$$\frac{\mathrm{e}\,[\sqrt{x}]}{\ln\left(\sqrt{x}-1\right)} \leqslant \frac{\mathrm{e}\,\sqrt{x}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}.$$

Comme $0 \leqslant \pi\left(\sqrt{x}\right) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}\,[\sqrt{x}]}{\ln\left([\sqrt{x}]\right)}$, par transitivité des relations d'ordre, il vient

$$\pi\left([\sqrt{x}]\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}\,\sqrt{x}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)} \overset{\sqrt{x}>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{x}\,\pi\left([\sqrt{x}]\right) \leqslant \frac{\mathrm{e}\,x}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}.$$

Puisque $0 \leqslant \displaystyle\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) \leqslant \sqrt{x}\,\pi\left([\sqrt{x}]\right)$, par transitivité des relations d'ordre, on a

$$0 \leqslant \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) \leqslant \frac{\mathrm{e}\,x}{\ln\left(\sqrt{x}\right)} \Leftrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}.$$

Observons que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\mathrm{e}}{\ln\left(\sqrt{x}\right)}\right) = 0$. En appliquant le théorème des gendarmes à la dernière double-inégalité, on obtient

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1)\right) = 0.$$

Cette limite signifie que

$$\boxed{\sum_{p \leqslant \sqrt{x}} (p-1) = o(x)}.$$

B.IV.3.e $[x/p]$ est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$\frac{x}{p} - 1 \leqslant \left[\frac{x}{p}\right] < \frac{x}{p} \overset{1/x>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{p} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x}\left[\frac{x}{p}\right] < \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x}\left[\frac{x}{p}\right] \leqslant \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{x}\right) \leqslant \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \frac{1}{x}\left[\frac{x}{p}\right] \leqslant \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \frac{1}{p}. \quad (\spadesuit_1)$$

Observons que

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{x}\right) = \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} \frac{1}{p} - \frac{1}{x} \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} 1. \quad (\spadesuit_2)$$

De plus, $\displaystyle\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} 1 = \sum_{p\leqslant x} 1 + \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} 1.$

Il y a autant de termes 1 dans la somme $\sum_{p\leqslant x} 1$ qu'il y a de nombres premiers compris dans l'intervalle $[0,x]$. Ce nombre se note $\pi\big([x]\big)$ (d'après l'énoncé), car $p\leqslant x \Rightarrow p\leqslant [x]$ (p est un nombre entier). De la même façon, $\sum_{p\leqslant\sqrt{x}} 1 = \pi\big([\sqrt{x}]\big)$. Ainsi,

$$\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x} 1 = \frac{\pi\big([x]\big)-\pi\big([\sqrt{x}]\big)}{x}.$$

Calculons alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{p}\right)$.

Observons que $\sqrt{[x]} < p < \sqrt{x}$ implique $[x] < p^2 \leqslant x$ par stricte croissance de la fonction $x\mapsto x^2$ sur $[0,+\infty[$. Mais aucun entier n'appartient à l'intervalle $\big][x],x\big]$ car $[x]$ est le plus grand entier vérifiant $[x]\leqslant x$. Par conséquent, on a l'implication

$$\sum_{\sqrt{[x]}<p<\sqrt{x}}\frac{1}{p} = 0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{p} = \sum_{\sqrt{[x]}<p<\sqrt{x}}\frac{1}{p} + \sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{p} = \sum_{\sqrt{[x]}<p\leqslant x}\frac{1}{p}.$$

Pour la même raison que $[x]$ est le plus grand entier vérifiant $[x]\leqslant x$, on a que $p\leqslant x \Leftrightarrow p\leqslant [x]$, et la dernière égalité devient alors

$$\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{p} = \sum_{\sqrt{[x]}<p\leqslant x}\frac{1}{p} = \sum_{\sqrt{[x]}<p\leqslant [x]}\frac{1}{p}.$$

Nous avons montré, à la question B.IV.1, que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\sqrt{n}<p\leqslant n}\frac{1}{p}\right) = \ln(2)$.

De la même manière manière, en posant $n=[x]$, nous pouvons écrire que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{\sqrt{[x]}<p\leqslant [x]}\frac{1}{p}\right) = \ln(2) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\left(\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{p}\right) = \ln(2).$$

> **Remarque** : On ne peut pas directement appliquer l'égalité de la question B.IV.1 en posant $n = x$ car x n'est pas nécessairement un entier. D'où le travail qui vient d'être fait...

En réutilisant l'inégalité de la question A.II.3 (rappelée en B.IV.3.d, page 61) et en posant $n = [x]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \pi\big([x]\big) \leqslant \mathrm{e}\frac{[x]}{\ln\big([x]\big)} \leqslant \mathrm{e}\frac{x}{\ln\big([x]\big)} && \text{car } [x]\leqslant x\\
\Rightarrow\quad & \frac{\pi\big([x]\big)}{x} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\ln\big([x]\big)} && \text{car } \frac{1}{x} > 0\\
\Leftrightarrow\quad & 0 \leqslant \frac{\pi\big([x]\big)-\pi\big([\sqrt{x}]\big)}{x} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\ln\big([x]\big)}
\end{aligned}$$

La dernière équivalence s'explique par le fait que

$$0\leqslant \pi\big([x]\big)-\pi\big([\sqrt{x}]\big) \leqslant \pi\big([x]\big) \Rightarrow 0 \leqslant \frac{\pi\big([x]\big)-\pi\big([\sqrt{x}]\big)}{x} \leqslant \frac{\pi\big([x]\big)}{x}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}}{\ln\big([x]\big)}\right)=0$, en appliquant le théorème des gendarmes dans cette double-inégalité, on peut dire que

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi\big([x]\big)-\pi\big(\big[\sqrt{x}\big]\big)}{x}\right)=0.$$

En passant à la limite dans l'égalité ($\spadesuit_2$), les deux calculs de limite précédents donnent :

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{x}\right)=\ln(2)+0=\ln(2).$$

En passant à la limite dans l'égalité ($\spadesuit_1$), on a alors

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{x}\right)\leqslant\lim_{x\to\infty}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{x}\left[\frac{x}{p}\right]\leqslant\lim_{x\to\infty}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{p}\\
\Rightarrow\quad&\ln(2)\leqslant\lim_{x\to\infty}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{x}\left[\frac{x}{p}\right]\leqslant\ln(2)\\
\Leftrightarrow\quad&\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{x}\left[\frac{x}{p}\right]\right)=\ln(2)\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{x\to\infty}\left[\left(\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\frac{1}{x}\left[\frac{x}{p}\right]\right)-\ln(2)\right]=0\\
\Leftrightarrow\quad&\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]-\ln(2)=o(1)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1}{x}\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]=\ln(2)+o(1).
\end{aligned}$$

En conclusion, on a bien la relation

$$\boxed{\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]=x\ln(2)+o(x)}\,.$$

B.IV.3.f On a :

$$a(x)\overset{\text{B.IV.3.c}}{=}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}(p-1)+\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x}\left[\frac{x}{p}\right]\overset{\substack{\text{B.IV.3.d}\\ \text{B.IV.3.e}}}{=}o(x)+\big(x\ln(2)+o(x)\big).$$

D'où l'égalité

$$\boxed{a(x)=x\ln(2)+o(x)}\,.$$

Par conséquent, $\dfrac{a(x)}{x}=\ln(2)+o(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\big(\ln(2)+o(1)\big)=\ln(2).$

On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite }\left(\frac{a(n)}{n}\right)_n\text{ converge et sa limite vaut }\ln(2)}\,.$$

On dit alors que A possède une *densité* et que cette densité est bien égale à $\ln(2)\approx 0{,}69$. Ce résultat signifie "moralement" qu'il y a une proportion de $\ln(2)$ d'entiers dans $\mathbb{N}$ (soit environ 69%) qui possèdent de grands facteurs premiers.

"Vérification" à l'aide du logiciel Maple

On présente, dans cette section à part, comment utiliser le logiciel Maple afin de "vérifier" ce résultat. Le but sera de calculer $a(n)$ pour de grandes valeurs de n, et vérifier que le quotient $a(n)/n$ est effectivement proche de la valeur $\ln(2)$.

Fonctions préliminaires

Il nous faut tout d'abord saisir deux fonctions qui nous serviront à calculer plus facilement $a(n)$: `premier_diviseur` et `decomposition` données ci-dessous :

```
1:  > premier_diviseur := proc(N)  # N est supposé >= 2
2:      local p;
3:      p := 2;
4:      while irem(N, p)>0 do p:=p+1; od;
5:        # "irem" renvoie le reste de le division euclidienne de N par p
6:      RETURN(p);
7:    end;
```

Expliquons le fonctionnement de cette fonction (appelée "procédure" en langage Maple) :

Ligne 1 : On va définir "`premier_diviseur`" comme étant une fonction prenant en entier N comme argument.

Ligne 2 : Une variable p sera localement utilisée dans la fonction (équivalent de la variable i dans une somme, par exemple), nous la déclarons.

Ligne 3 : Nous initialisons la valeur de p à 2.

Ligne 4 : C'est une boucle signifiant "tant que le reste de la division euclidienne de N par P est strictement supérieur à 0, faire : $p := p+1$.

Ligne 5 : C'est un commentaire.

Ligne 6 : On retourne la valeur de p. Ceci signifie que si, par exemple, $N = 10$ (donc $p = 2$), alors `premier_diviseur(10)` renverra le nombre 2.

Ligne 7 : Marque la fin de la fonction `premier_diviseur`.

Cette fonction a donc pour but de déterminer le premier diviseur d'un nombre. Exemples :

`premier_diviseur(2)` $= 2$; `premier_diviseur(3)` $= 3$; `premier_diviseur(4)` $= 2$;
`premier_diviseur(5)` $= 5$; `premier_diviseur(6)` $= 2$; `premier_diviseur(7)` $= 7$;
`premier_diviseur(8)` $= 2$; `premier_diviseur(9)` $= 3$; `premier_diviseur(10)` $= 2$.

Cette fonction nous sera particulièrement utile pour la décomposition d'un entier supérieur ou égal à deux en produit de facteurs premiers. C'est la fonction suivante qui s'en charge :

```
 1:  > decomposition := proc(N)  # N est supposé >= 2
 2:      local n, p, e, q, f;
 3:      n := N; f := NULL;
 4:      while n>1 do
 5:        p := premier_diviseur(n);
 6:        e := 0;
 7:        while irem(n, p, 'q')=0 do n := q; e := e+1 od;
 8:          # la fonction "irem" place le quotient de la div. euclidienne dans "q"
 9:        f := f, p^{e};
10:      od;
11:      RETURN([f]); # On renvoie la décomposition sous forme de liste
12:    end;
```

Expliquons à présent le fonctionnement de cette fonction légèrement plus complexe :

Ligne 1 : On appelle `decomposition` la fonction que nous allons créer, prenant un entier N comme argument.

Ligne 2 : On indique à Maple quels sont les variables que nous allons utiliser à l'intérieur de cette fonction.

Ligne 3 : On initialise n à N, et f à `NULL` (f sera donc une liste pour l'instant vide).

Ligne 4 : "Tant que $n > 1$, faire les lignes 5 à 9 incluse" (la valeur de n diminuera, assurant l'arrêt de la boucle)

Ligne 5 : On pose $p :=$ `premier_diviseur(n)`. [1]

Ligne 6 : On pose $e := 0$. [2]

Ligne 7 : "Tant que la division euclidienne de n par p vaut 0 (autrement dit, tant que p divise n), faire : $q :=$ quotient de cette division euclidienne (c'est le `irem(n,p,'q')` qui fait ça), $n := q$ et $e := e+1$.

Ligne 8 : C'est un commentaire.

Ligne 9 : On fait $f = f, p\hat{}\{e\}$ (on augment la liste f avec l'élément $p\hat{}\{e\}$).

Ligne 10 : Fin de la première boucle.

Ligne 11 : On renvoie la décomposition sous forme de liste.

Ligne 12 : Marque la fin de la fonction `decompose`.

Cette fonction effectue de manière classique la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers. En effet, comment faisons-nous pour trouver une telle décomposition de 82 ?

- Nous cherchons d'abord le premier diviseur de 72 : c'est 2.
- Nous divisons 72 par ce diviseur 2 : on trouve 36.
- Nous cherchons ensuite le premier diviseur de 36 : c'est encore 2.
- Nous divisons 36 par ce diviseur 2 : on trouve 18.
- Nous cherchons alors le premier diviseur de 18 : c'est toujours 2.
- Nous divisons 18 par ce diviseur 2 : on trouve 9.
- Nous cherchons enfin le premier diviseur de 9 : c'est 3.
- Nous divisons 9 par ce diviseur 3 : on trouve 3.
- Le nombre 3 est premier, on s'arrête donc, et on trouve :

$$72 = 2^3 \times 3^2.$$

[1] : On cherche le premier diviseur du nombre n afin de pouvoir faire la division euclidienne de n par ce nombre.

[2] : e correspondra à l'exposant de p.

Donnons quelques exemples de ce que renvoie la fonction `decompose` :

`decomposition(10)` $= \left[2^{\{1\}}, 5^{\{1\}}\right]$; `decomposition(20)` $= \left[2^{\{2\}}, 5^{\{1\}}\right]$
`decomposition(36)` $= \left[2^{\{2\}}, 3^{\{2\}}\right]$; `decomposition(180)` $= \left[2^{\{2\}}, 3^{\{2\}}, 5^{\{1\}}\right]$.

Avant d'en arriver à la saisie de la fonction a, notons que pour accéder à des éléments d'une liste en Maple, c'est la fonction `op` qu'il faille utiliser. Par exemple, dans la liste $L1 := [a, b, c, d, e]$, pour accéder à l'élément d, on tape `op(4,L1);`.

Pour extraire $P^+(n)$ de la décomposition de n, il nous faut donc d'abord connaître le nombre d'éléments de la liste issue de `decompose(n)`. En Maple, ce nombre est accessible par la commande `nops`, qui renvoie le nombre d'élémén̈ts d'une liste. Donc, si l'on saisit par exemple `op(nops(decomposition(180), decomposition(180));`, Maple nous renverra le troisième élément de la liste `decomposition(180)`, soit $5^{\{1\}}$. Posons $L2$ ce nombre. Il reste à faire `op(1,L2);` afin d'extraire 5, c'est-à-dire $P^+(180)$.

Saisie de la fonction *a*

On saisit maintenant la fonction `a` prenant comme argument un nombre N et qui renverra le nombre $a(N)$:

```
a := proc (N)  # N est supposé >= 2
  local k, de, p, s, c;
  c := 0;
  for k from 2 to n do
    de := decomposition(k);
    p := op(1, op(nops(de), de));
    s := sqrt(k);
    if evalf(s)<evalf(p) then c := c+1; end if;
  end do;
  RETURN(c);
end;
```

Le principe de cette fonction est de calculer $a(N)$. Pour tout entier k compris entre 2 et N, on calcule $P^+(k)$ noté `p` (selon la méthode décrite en fin de paragraphe précédent) et $\sqrt{k}$ noté `s`. On les compare, et s'il vérifie la condition $P^+(k) > \sqrt{k}$, alors on ajoute une unité à une compteur local initialisé à 0. La valeur final du compteur donnera donc la valeur recherchée : $a(N)$.

Il suffit alors de choisir un nombre n, de saisir `evalf(a(n)/n);` et d'attendre que le résultat s'affiche (ça peut être très long pour de grandes valeurs de n...) On trouvera en particulier :

$a(10000)/10000 \approx 73,190\%$; $a(20000)/20000 \approx 73,205\%$;
$a(30000)/30000 \approx 73,326\%$; $a(40000)/40000 \approx 73,333\%$;
$a(50000)/50000 \approx 73,356\%$; $a(60000)/60000 \approx 73,362\%$;
$a(70000)/70000 \approx 73,374\%$; $a(80000)/80000 \approx 73,353\%$;
$a(90000)/90000 \approx 73,311\%$; $a(100000)/100000 \approx 73,322\%$;
$a(110000)/110000 \approx 73,322\%$; $a(120000)/120000 \approx 73,338\%$;
$a(130000)/130000 \approx 73,348\%$; $a(140000)/140000 \approx 73,352\%$;
$a(150000)/150000 \approx 73,353\%$; $a(160000)/160000 \approx 73,355\%$;
$a(170000)/170000 \approx 73,356\%$; $a(180000)/180000 \approx 69,279\%$;
$a(190000)/190000 \approx 69,499\%$; $a(200000)/200000 \approx 69,686\%$;
$a(210000)/210000 \approx 69,855\%$; $a(220000)/220000 \approx 70,000\%$;
$a(230000)/230000 \approx 70,133\%$; $a(240000)/240000 \approx 70,263\%$;
$a(250000)/250000 \approx 70,375\%$; $a(260000)/260000 \approx 70,481\%$;
$a(270000)/270000 \approx 70,578\%$; $a(280000)/280000 \approx 68,149\%$;
$a(290000)/290000 \approx 68,329\%$; $a(300000)/300000 \approx 68,497\%$;
$a(310000)/310000 \approx 68,657\%$; $a(320000)/320000 \approx 68,806\%$;
$a(330000)/330000 \approx 68,945\%$; $a(340000)/340000 \approx 69,076\%$;
$a(350000)/350000 \approx 69,200\%$; $a(360000)/360000 \approx 69,313\%$;
$a(370000)/370000 \approx 69,422\%$; $a(380000)/380000 \approx 69,520\%$;
$a(390000)/390000 \approx 69,612\%$; $a(400000)/400000 \approx 69,698\%$;
$a(410000)/410000 \approx 69,786\%$; $a(420000)/420000 \approx 69,863\%$;
$a(430000)/430000 \approx 69,939\%$; $a(440000)/440000 \approx 70,007\%$;
$a(450000)/450000 \approx 70,730\%$; $a(460000)/460000 \approx 70,138\%$;
$a(470000)/470000 \approx 70,198\%$; $a(480000)/480000 \approx 70,256\%$;
$a(490000)/490000 \approx 70,311\%$; $a(500000)/500000 \approx 70,366\%$;
$a(510000)/510000 \approx 70,421\%$; $a(520000)/520000 \approx 70,472\%$;
$a(530000)/530000 \approx 70,524\%$; $a(540000)/540000 \approx 70,572\%$;
$a(550000)/550000 \approx 70,617\%$; $a(560000)/560000 \approx 70,662\%$;
$a(570000)/570000 \approx 70,402\%$; $a(580000)/580000 \approx 70,707\%$;
$a(590000)/590000 \approx 70,784\%$; $a(600000)/600000 \approx 70,821\%$;
$a(610000)/610000 \approx 70,856\%$; $a(620000)/620000 \approx 70,893\%$;
$a(630000)/630000 \approx 70,929\%$; $a(640000)/640000 \approx 70,963\%$;
$a(650000)/650000 \approx 70,998\%$; $a(660000)/660000 \approx 71,032\%$;
$a(670000)/670000 \approx 71,063\%$; $a(680000)/680000 \approx 71,096\%$;
$a(690000)/690000 \approx 71,122\%$; $a(700000)/700000 \approx 70,151\%$;
$a(710000)/710000 \approx 71,177\%$; $a(720000)/720000 \approx 71,204\%$;
$a(730000)/730000 \approx 71,231\%$; $a(740000)/740000 \approx 70,256\%$;
$a(750000)/750000 \approx 71,278\%$; $a(760000)/760000 \approx 71,303\%$;
$a(770000)/770000 \approx 71,325\%$; $a(780000)/780000 \approx 71,347\%$;
$a(790000)/790000 \approx 71,367\%$; $a(800000)/800000 \approx 71,386\%$;

$$\begin{array}{rcl}
a(810000)/810000 \approx 71,406\% & ; & a(820000)/820000 \approx 71,428\% \quad ; \\
a(830000)/830000 \approx 71,447\% & ; & a(840000)/840000 \approx 71,467\% \quad ; \\
a(850000)/850000 \approx 71,486\% & ; & a(860000)/860000 \approx 71,504\% \quad ; \\
a(870000)/870000 \approx 71,522\% & ; & a(880000)/880000 \approx 71,541\% \quad ; \\
a(890000)/890000 \approx 71,559\% & ; & a(900000)/900000 \approx 71,576\% \quad ; \\
a(910000)/910000 \approx 71,\% & ; & a(920000)/920000 \approx 71,\% \quad ; \\
a(930000)/930000 \approx 71,\% & ; & a(940000)/940000 \approx 71,\% \quad ; \\
a(950000)/950000 \approx 71,\% & ; & a(960000)/960000 \approx 71,\% \quad ; \\
a(970000)/970000 \approx 71,\% & ; & a(980000)/980000 \approx 71,\% \quad ; \\
a(990000)/990000 \approx 71,\% & ; & a(1000000)/1000000 \approx 71,\%.
\end{array}$$

Rappelons que le pourcentage correspondant à ln(2) est environ égal à $69,315\%$.