Correction de l'épreuve d'analyse
Capes 2003

Calixte Denizet
calixteman@yahoo.fr

18 avril 2003

I Opérateurs linéaires positifs. Propriétés et exemples

I.1. Montrons tout d'abord que u est croissante pour la relation d'ordre partiel. En effet, on a

$$f \geqslant g \Longrightarrow f - g \geqslant 0 \Longrightarrow u(f-g) \geqslant 0 \Longrightarrow u(f) - u(g) \geqslant 0 \Longrightarrow u(f) \geqslant u(g)$$

Montrons le résultat annoncé :

$$\begin{array}{rcl} |u(f)| & = & \varepsilon u(f) \text{ avec } \varepsilon = \text{signe}(u(f)) \\ & = & u(\varepsilon f) \text{ or } \varepsilon f \leqslant |f| \\ |u(f)| & \leqslant & u(|f|) \text{ car } u \text{ est croissante} \end{array}$$

I.2. Il est clair que si u est l'endomorphisme nul, alors $u(e_0) = 0$. Réciproquement, supposons que $u(e_0) = 0$ et soit $f \in \mathcal{H}$. Puisque f est continue sur un compact, $\|f\|_\infty$ existe et est atteinte, donc $f \leqslant \|f\|_\infty e_0$. Ainsi

$$u(f) \leqslant \|f\|_\infty u(e_0) = 0$$

Ainsi $u(f)$ est nul. On en conclut que u est l'endomorphisme nul.

I.3. On a vu précédemment que

$$\forall f \in \mathcal{H} \quad |u(f)| \leqslant \|f\|_\infty u(e_0) \text{ (avec } u(e_0) > 0 \text{ car } e_0 > 0)$$

Donc

$$|u(f) - u(g)| = |u(f-g)| \leqslant \|f - g\|_\infty u(e_0)$$

Ainsi u est lipschitzienne donc continue.

I.4. De la relation rappelée dans la question précédente, on déduit que

$$\forall f \in \mathcal{H}\backslash\{0\} \quad \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leqslant u(e_0) \text{ donc } \|u\|_\infty \leqslant u(e_0)$$

Or

$$\frac{\|u(e_0)\|_\infty}{\|e_0\|_\infty} = u(e_0)$$

On en déduit que

$$\|u\|_\infty = u(e_0)$$

I.5. Il est clair que u_n est un opérateur linéaire. Supposons qu'il soit positif.
Les $(x_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ étant en nombre fini et distincts, ils sont isolés c'est à dire qu'il existe des intervalles $I_{n,k} \subset I$ tels que $x_{n,k} \in I_{n,k}$ et que si $k' \neq k$, alors $x_{n,k'} \notin I_{n,k}$. Soit maintenant une famille de fonctions positives et continues $(f_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telles que $f_{n,k}(x_{n,k}) = 1$ et $f_{n,k}(I \backslash I_{n,k}) = 0$. On a alors $u_n(f_{n,k}) = u_{n,k}$. Or $f_{n,k} \geqslant 0$ donc $u_n(f_{n,k}) \geqslant 0$ et ainsi $u_{n,k} \geqslant 0$. Nous avons donc démontré que u positif implique que les $u_{n,k}$ sont positifs. La réciproque est triviale compte tenu qu'une somme de termes positifs est positive.

I.6.1. On a

$$\begin{aligned}
B_n(f_y)(x) &= \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{ky}{n}} B_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{\frac{ky}{n}} \mathrm{C}_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \left(x e^{\frac{y}{n}}\right)^k (1-x)^{n-k} \\
&= \left(x e^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
B_n(f_y)(x) &= \varphi_n(x,y)
\end{aligned}$$

I.6.2. On a

$$B_n(e_j)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^j B_{n,k}(x)$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j} &= \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left(\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{ky}{n}} B_{n,k}(x) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{d^j \left(e^{\frac{ky}{n}}\right)}{dy^j} B_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^j e^{\frac{ky}{n}} B_{n,k}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x,0) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^j B_{n,k}(x) = B_n(e_j)(x)$$

I.6.3. On a, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
B_n(e_0)(x) &= \varphi_n(x,0) = 1 \Longrightarrow B_n(e_0) = e_0 \\
B_n(e_1)(x) &= n\frac{x}{n}\left(x e^{\frac{0}{n}} + 1 - x\right)^{n-1} = x \Longrightarrow B_n(e_1) = e_1 \\
B_n(e_2)(x) &= \frac{n-1}{n} x^2 \left(x e^{\frac{0}{n}} + 1 - x\right)^{n-2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 \Longrightarrow B_n(e_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_2
\end{aligned}$$

I.7.1. Effectuons le changement de variable $v = x - t$ d'où $dv = -\,dt$. Ainsi

$$u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t)\,dt = \int_{x+\pi}^{x-\pi} -f(v)K(x-v)\,dv = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)K(x-t)\,dt$$

Or la fonction $t \mapsto f(t)K(x-t)$ étant continue et 2π-périodique, on a

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)K(x-t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(x-t)\,dt$$

En effet, soit $g \in \mathcal{F}$, posons pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\gamma(\alpha) = \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} g(t)\,dt$$

Puisque g est continue, γ est alors dérivable, et on a

$$\gamma'(\alpha) = g(\alpha+\pi) - g(\alpha-\pi)$$

Les quantités $\alpha+\pi$ et $\alpha-\pi$ différant de 2π, on déduit de la 2π-périodicité de g que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \gamma'(\alpha) = 0$$

Et finalement, on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \gamma(\alpha) = \gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt$$

I.7.2. La fonction K étant un polynôme trigonométrique, on a

$$K(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

On en déduit, en utilisant des formules classiques de trigonométrie, que

$$\begin{aligned}
K(x-t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k(x-t)) + b_k \sin(k(x-t))) \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k(\cos(kx)\cos(kt) + \sin(kx)\sin(kt)) \\
&\qquad + b_k(\sin(kx)\cos(kt) - \sin(kt)\cos(kx))] \\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{n} [(a_k \cos(kt) - b_k \sin(kt))\cos(kx) \\
&\qquad + (a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt))\sin(kx)] \\
K(x-t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k(t)\cos(kx) + \beta_k(t)\sin(kx))
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
u(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(x-t)\,dt \\
&= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\alpha_k(t)\,dt \right) \cos(kx) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\beta_k(t)\,dt \right) \sin(kx) \right]
\end{aligned}$$

On en déduit que $u(f)$ est un polynôme trigonométrique.

I.7.3. Si K est positive, alors u est clairement positive. Montrons la réciproque. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ pour lequel $K(t_0) < 0$ puis en montrant que $u(f)(0) < 0$ (avec $f \geqslant 0$ judicieusement choisie) ce qui contredira la positivité de u.

Montrons d'abord qu'il existe $t_1 \in]-\pi, \pi[$ tel que $K(t_1) < 0$. Si $t_0 \notin \mathbb{Z}\pi$, alors par 2π-périodicité de K, on peut trouver $t_1 \in]-\pi, \pi[$ tel que $K(t_1) < 0$. Si $t_0 \in \mathbb{Z}\pi$, alors par continuité de K, il existe un intervalle I centré en t_0 tel que $K_{|I} < 0$. L'ensemble $\mathbb{Z}\pi$ étant constitué de points isolés, on en déduit l'existence de $t'_0 \in I \backslash \mathbb{Z}\pi$ tel que $K(t'_0) < 0$ donc l'existence de $t_1 \in]-\pi, \pi[$ tel que $K(t_1) < 0$.
Par continuité de K en t_1, il existe alors un intervalle $I_0 \subset]-\pi, \pi[$ centré en t_1 dans lequel K est négative.
Considérons une fonction f_0 positive, continue et 2π-périodique telle qu'elle soit nulle sur $[-\pi, \pi] \backslash I_0$ et strictement positive sur I_0. Puis posons pour tout $t \in \mathbb{R}$ $f(t) = f_0(-t)$ (donc $f(-t) = f_0(t)$). On a alors

$$u(f)(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)K(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)K(t)\,dt = \int_{I_0} f_0(t)K(t)\,dt < 0 \text{ car } K_{|I_0} < 0$$

Donc $u(f)(0) < 0$ ce qui contredit la positivité de u.

I.8.1. La fonction θ_p présente des discontinuités en les multiples entiers relatifs de π. Observons le comportement de θ_p au voisinage de ses discontinuités. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a alors

$$\theta_p(x) = \frac{\sin(px)}{\sin x} = \frac{\sin(px - pk\pi + pk\pi)}{\sin(x - k\pi + k\pi)} = \frac{(-1)^{pk}}{(-1)^k}\frac{\sin(p(x-k\pi))}{\sin(x-k\pi)}$$

Or au voisinage de 0, on a $\sin x \sim x$, donc au voisinage de $k\pi$

$$\theta_p(x) \sim (-1)^{(p-1)k}\frac{p(x-k\pi)}{x-k\pi} \sim (-1)^{(p-1)k}p$$

Ainsi θ_p est prolongeable par continuité en chaque point de $\mathbb{Z}\pi$ en une fonction nommée $\tilde{\theta}_p$. De plus, θ_p étant clairement 2π-périodique sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$, il faut vérifier que $\tilde{\theta}_p$ est encore 2π-périodique

$$\tilde{\theta}_p(k\pi + 2\pi) = \tilde{\theta}_p((k+2)\pi) = (-1)^{(p-1)(k+2)}p = (-1)^{(p-1)k}(-1)^{2(p-1)}p = \tilde{\theta}_p(k\pi)$$

Par conséquent, θ_p se prolonge en une fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

I.8.2. En utilisant la linéarité de la partie réelle (notée $\Re e$) et l'égalité $\cos x = \Re e(e^{ix})$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=1}^{n}\Re e\left(e^{ikx}\right) \\
&= \Re e\left(\sum_{k=1}^{n}e^{ikx}\right) \\
\sum_{k=1}^{n}e^{ikx} &= e^{ix}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} \\
&= e^{ix}\frac{e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\frac{e^{i\frac{nx}{2}}-e^{-i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= e^{i\frac{n+1}{2}x}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On en déduit que

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Or en utilisant les formules de trigonométrie, on obtient

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Donc

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$$

I.8.3. On remarque tout d'abord que

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)=\frac{1}{2}\theta_{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

car l'égalité est claire sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$ et puisque le membre de droite est partout continue et 2π-périodique, l'égalité se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier.
Montrons l'égalité demandée

$$\begin{aligned}
S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt\right)\cos(kx)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt\right)\sin(kx)\right]\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(kt)\cos(kx)+\sin(kt)\sin(kx))\,dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(k(x-t))\,dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k(x-t))\right)\,dt\\
S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right)\,dt
\end{aligned}$$

I.8.4. En utilisant la linéarité de la fonction partie imaginaire (notée $\Im m$) et l'égalité

$\sin x = \Im m(e^{ix})$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \Im m\left(e^{ikx+i\frac{x}{2}}\right) \\
&= \Im m\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx+i\frac{x}{2}}\right) \\
\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx+i\frac{x}{2}} &= e^{i\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} \\
&= e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} \\
&= e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \frac{e^{i\frac{nx}{2}} - e^{-i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Puis que

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)$$

I.8.5. On a

$$\begin{aligned}
T_n(f) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_n(f) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2n+1)\frac{x-t}{2}\right)\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{n(x-t)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\sin^2\left(\frac{n(x-t)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\theta_{2n+1}^2\left(\frac{x-t}{2}\right) dt
\end{aligned}$$

Posons

$$K_n(t) = \frac{1}{2\pi n}\theta_{2n+1}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\right)^2$$

Remarquons d'abord que K_n est positive. Montrons ensuite que K_n est un polynôme trigonométrique

$$\begin{aligned}
K_n(t) &= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)^2 \\
&= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)+\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}\cos(kt)\cos(\ell x)\right) \\
&= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}(\cos((k+\ell)t)+\cos((k-\ell)t))\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que K_n est un polynôme trigonométrique positif.

I.8.6. De la question I.7.3. et de la positivité de K_n, on déduit la positivité de l'opérateur linéaire T_n.

I.8.7. On a pour tout $(j,k)\in\mathbb{Z}^2$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}e^{ikt}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j+k)t}\,dt$$

En notant $\delta_{j,k}$ le symbole de Kroenecker, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt}e^{ikt}\,dt = 2\delta_{j,-k}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jt)e^{ikt}\,dt &= \frac{1}{2}\left(2\delta_{j,-k}+2\delta_{-j,-k}\right) \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jt)\cos(kt)\,dt &= \Re e(\delta_{j,-k}+\delta_{-j,-k}) \\
&= \delta_{j,k}(1+\delta_{j,0}) \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jt)\sin(kt)\,dt &= \Im m(\delta_{j,-k}+\delta_{-j,-k}) \\
&= 0 \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(jt)e^{ikt}\,dt &= \frac{1}{2i}\left(2\delta_{j,-k}-2\delta_{-j,-k}\right) \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(jt)\cos(kt)\,dt &= \Re e\left(\frac{\delta_{j,-k}-\delta_{-j,-k}}{i}\right) \\
&= 0 \\
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jt)\sin(kt)\,dt &= \Im m\left(\frac{\delta_{j,-k}-\delta_{-j,-k}}{i}\right) \\
&= -\delta_{j,-k}+\delta_{-j,-k} \\
&= \delta_{j,k}
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}
S_n(c_j) &= c_j \text{ si } n\geqslant j \text{ et } S_n(c_j)=0 \text{ sinon.} \\
S_n(s_j) &= s_j \text{ si } n\geqslant j \text{ et } S_n(s_j)=0 \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

On a immédiatement

$$T_n(c_j) = \frac{n-j}{n} c_j \text{ si } n \geqslant j \text{ et } T_n(c_j) = 0 \text{ sinon.}$$
$$T_n(s_j) = \frac{n-j}{n} s_j \text{ si } n \geqslant j \text{ et } T_n(s_j) = 0 \text{ sinon.}$$

II Théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$

II.1. La fonction f étant continue sur I compact, le théorème de Heine permet d'affirmer que f est uniformément continue sur I. Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall (x,y) \in I^2 \quad |x-y| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Soient donc $\varepsilon > 0$ et η_ε défini comme ci-dessus. Soit $(x,t) \in I^2$. Nous allons traiter les deux cas $|t-x| \leqslant \eta_\varepsilon$ et $|t-x| > \eta_\varepsilon$ séparemment :

i) Si $|t-x| \leqslant \eta_\varepsilon$, alors d'après l'uniforme continuité de f, on a

$$|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(t-x)^2 \text{ car } 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(t-x)^2 \geqslant 0$$

ii) Si $|t-x| > \eta_\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leqslant |f(t)| + |f(x)| \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \end{aligned}$$

Or $|t-x| > \eta_\varepsilon \Longrightarrow \frac{(t-x)^2}{\eta_\varepsilon^2} > 1$, donc

$$|f(t) - f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty \times 1 \leqslant 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(t-x)^2 \leqslant \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(t-x)^2$$

On en conclut donc que

$$\forall (t,x) \in I^2 \quad |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(t-x)^2$$

II.2. Il suffit d'utiliser l'inégalité obtenue à la question précédente.
Soient $\varepsilon > 0$ et η_ε défini comme précédemment. On a alors

$$\begin{aligned} \forall (t,x) \in I^2 \quad |f(t) - f(x)| &\leqslant \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(t^2 - 2xt + x^2) \\ |f(t) - f(x)e_0(t)| &\leqslant \varepsilon e_0(t) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(e_2(t) - 2xe_1(t) + x^2 e_0(t)) \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité demandée.

II.3. On a d'après la question précédente, la question I.1., la linéarité et la positivité de u

$$\begin{aligned} |u(f - f(x)e_0)| &\leqslant u(|f - f(x)e_0|) \\ &\leqslant u\left(\varepsilon e_0 + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0)\right) \\ &\leqslant \varepsilon u(e_0) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2 u(e_0)) \end{aligned}$$

II.4. On remarque tout d'abord que pour tout $x \in I$

$$e_2(x) - 2e_1(x)e_1(x) + e^2(x)e_0(x) = x^2 - 2x^2 + x^2 = 0$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\|g_n\|_\infty &= \|u_n(e_2) - e_2 + 2e_1(u_n(e1) - e_1) + e_2(u_n(e_0) - e_0)\|_\infty \\
&\leqslant \|u_n(e_2) - e_2\|_\infty + \|2e_1(u_n(e1) - e_1)\|_\infty + \|e_2(u_n(e_0) - e_0)\|_\infty \\
&\leqslant \|u_n(e_2) - e_2\|_\infty + 2\|e_1\|_\infty\|u_n(e1) - e_1\|_\infty + \|e_2\|_\infty\|u_n(e_0) - e_0\|_\infty
\end{aligned}$$

Or les trois suites apparaissant dans le membre de droite de l'inégalité tendent vers 0 (car il y a convergence uniforme donc convergence pour la norme $\|.\|_\infty$). On en conclut que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

II.4.2. D'après l'inégalité (10), on a

$$\begin{aligned}
|h_n(x)| &\leqslant \varepsilon u_n(e_0)(x) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(u_n(e_2)(x) - 2xu_n(e_1)(x) + x^2u_n(e_0)(x)) \\
&\leqslant \varepsilon u_n(e_0)(x) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}g_n(x) \\
\|h_n\|_\infty &\leqslant \varepsilon\|u_n(e_0)\|_\infty + 2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}\|g_n\|_\infty
\end{aligned}$$

Or $\|g_n\|_\infty$ tend vers 0 quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini, donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \|g_n\|_\infty \leqslant \frac{\eta_\varepsilon^2}{2\|f\|_\infty}\varepsilon$$

Ainsi

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \|h_n\|_\infty \leqslant \varepsilon\|u_n(e_0)\|_\infty + \varepsilon$$

Or la quantité $\|u_n(e_0)\|_\infty$ reste bornée car $\|u_n(e_0) - e_0\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit que la suite $(\|h_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle, donc que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

II.4.3. On a pour tout $x \in I$

$$h_n(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x) = (u_n(f) - f(x)u_n(e0))(x) = u_n(f)(x) - f(x)u_n(e_0)(x)$$

Donc

$$u_n(f)(x) - f(x) = h_n(x) + f(x)(u_n(e_0)(x) - e_0(x)) \text{ car } e_0 = 1$$

On en déduit que

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leqslant \|h_n(x)\|_\infty + \|f\|_\infty\|u_n(e_0) - e_0\|_\infty$$

Le membre de droite de l'inégalité tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, on en conclut que $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

II.5. Compte tenu de ce qui précède, pour montrer que $(B_n(f))_{n\geqslant1}$ converge uniformément vers f, il suffit de montrer que $(B_n(e_i))_{n\geqslant1}$ converge uniformément vers e_i pour $i = 0, 1, 2$ (car $B_n \geqslant 0$).

Etant donné que $B_n(e_0) = e_0$ et que $B_n(e_1) = e_1$, il reste à établir la convergence uniforme de $B_n(e_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_2$. On a

$$\|B_n(e_2) - e_2\|_\infty = \frac{1}{n}\|e_2\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que $(B_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f (ce résultat est en fait assez intuitif en faisant de simples raisonnements probabilistes).

II.6. On remarque tout d'abord que sur $[0,1]$, $B_n(f)$ est un polynôme, donc de la question précédente on déduit la densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme de la convergence uniforme.
Si maintenant $I = [a,b]$, on considère la fonction $\tau_{a,b} : x \in [0,1] \mapsto a + (b-a)x \in I$ (qui est polynômiale et de réciproque polynômiale). Soit $f \in \mathcal{C}(I)$, alors $f \circ \tau_{a,b} \in \mathcal{C}([0,1])$. De la remarque précédente, on déduit alors que $(B_n(f \circ \tau_{a,b}))_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers $f \circ \tau_{a,b}$, donc que $\left(B_n(f \circ \tau_{a,b}) \circ \tau_{a,b}^{-1}\right)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f. Par conséquent, $\mathbb{R}[x]$ est dense dans $\mathcal{C}(I)$ pour la norme de la convergence uniforme.

II.7.1. Montrons que la fonction $u_n(f)$ a bien un sens. On a pour $x \geqslant b$, $f(x) = f(b)$ donc

$$\begin{aligned}
u_n(f)(x) &= e^{-nx} \sum_{0\leqslant k\leqslant nb} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}x^k + e^{-nx} f(b) \sum_{k>nb} \frac{n^k}{k!}x^k \\
&= e^{-nx} \sum_{0\leqslant k\leqslant nb} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n^k}{k!}x^k + e^{-nx} f(b) \left(e^{nx} - \sum_{0\leqslant k\leqslant nb} \frac{n^k}{k!}x^k\right) \\
&= e^{-nx} \sum_{0\leqslant k\leqslant nb} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - 1\right]\frac{n^k}{k!}x^k + f(b)
\end{aligned}$$

Cette dernière somme étant finie, $u_n(f)$ a bien un sens. Remarquons de plus que u_n est trivialement une application linéaire positive de $\mathcal{C}(I)$ dans lui-même.

II.7.2. Nous avons les relations

$$\begin{aligned}
e^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\frac{n^k}{k!}x^k &= 1\\
e^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{n}\frac{n^k}{k!}x^k &= xe^{-nx}\sum_{k\geqslant 1}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}\\
&= xe^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\frac{n^k}{k!}x^k\\
e^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{n}\frac{n^k}{k!}x^k &= x\\
e^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{n^k}{k!}x^k &= xe^{-nx}\sum_{k\geqslant 1}\frac{k}{n}\frac{n^{k-1}}{(k-1)!}x^{k-1}\\
&= xe^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k+1}{n}\frac{n^k}{k!}x^k\\
&= xe^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{n}\frac{n^k}{k!}x^k+\frac{x}{n}e^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\frac{n^k}{k!}x^k\\
e^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{n^k}{k!}x^k &= x^2+\frac{x}{n}
\end{aligned}$$

De ces trois relations, on déduit

$$e^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\frac{n^k}{k!}x^k=\frac{x}{n}$$

De plus, on a

$$u_n\left(t\mapsto (t-x)^2\right)(x)=e^{-nx}\sum_{0\leqslant k\leqslant nb}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\frac{n^k}{k!}x^k+e^{-nx}(b-x)^2\sum_{k>nb}\frac{n^k}{k!}x^k$$

Or pour $\frac{k}{n}>b$, on a $(b-x)^2<\left(\frac{k}{n}-x\right)^2$, on en déduit

$$u_n\left(t\mapsto (t-x)^2\right)(x)\leqslant e^{-nx}\sum_{k\geqslant 0}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\frac{n^k}{k!}x^k=\frac{x}{n}$$

Nous avons vu à la question II.1. que

$$\forall (t,x)\in I^2\quad |f(t)-f(x)|\leqslant \varepsilon+2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}(t-x)^2$$

On déduit de cette inégalité que

$$|u_n(f)(x)-f(x)|\leqslant \varepsilon u_n(e_0)+2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}u_n(t\mapsto (t-x)^2)(x)\leqslant \varepsilon+2\frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2}\frac{x}{n}$$

Ainsi, si $x\in I$ (qui est compact donc borné), on a pour n suffisamment grand

$$|u_n(f)(x)-f(x)|\leqslant 2\varepsilon$$

d'où on en déduit la convergence uniforme de $(u_n(f))_{n\geqslant 1}$ vers f sur I.

II.8.1. On remarque que x_0, x_1, x_2 racines de θ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \theta_0(x_0) & \theta_1(x_0) & \theta_2(x_0) \\ \theta_0(x_1) & \theta_1(x_1) & \theta_2(x_1) \\ \theta_0(x_2) & \theta_1(x_2) & \theta_2(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Appelons M la matrice apparaissant dans la relation précédente. L'existence de λ_0, λ_1, λ_2 implique la relation matricielle suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \theta_0(x_0) & \theta_0(x_1) & \theta_0(x_2) \\ \theta_1(x_0) & \theta_1(x_1) & \theta_1(x_2) \\ \theta_2(x_0) & \theta_2(x_1) & \theta_2(x_2) \end{pmatrix}}_{{}^tM} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit donc $y \in (\text{Im } M)^{\perp}\backslash\{0\}$ (y existe car $(\text{Im } M)^{\perp} = \{0\}$ impliquerait que $\text{Ker } M = \{0\}$ ce qui n'est pas le cas puisque $(a_0, a_1, a_2) \in \text{Ker } M$ et que ce vecteur est non nul). Or $\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \langle {}^tMy, x\rangle = \langle y, Mx\rangle = 0$. Donc pour $x = {}^tMy$, on a

$$\|{}^tMy\|^2 = \langle {}^tMy, {}^tMy\rangle = 0 \Longrightarrow {}^tMy = 0$$

Posons

$$y' = \frac{y}{2\text{max}(|y_0|, |y_1|, |y_2|)}$$

On a clairement $|y'_k| < 1$ pour $k = 0, 1, 2$. Si au moins deux des y'_k sont positifs ou nuls alors on pose $\lambda = y'$, sinon on pose $\lambda = -y'$.

II.8.2. On remarque d'abord que $0 \leqslant \delta_n \leqslant 1$ donc $0 \leqslant e_0 - \delta_n \leqslant 1$. De plus $1 + \lambda_0 \geqslant 0$, donc si $f \geqslant 0$, alors $u_n(f)$ est clairement positif (car $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2$).

II.8.3. On a

$$\begin{array}{rcl} u_n(\theta_k) & = & (e_0 - \delta_n)\theta_k + (\theta_k(x_0) + \lambda_0\theta_k(x_0) + \lambda_1\theta_k(x_1) + \lambda_2\theta_k(x_2))\delta_n \\ & = & (e_0 - \delta_n)\theta_k + \theta_k(x_0)\delta_n \\ & = & \theta_k + (\theta_k(x_0) - \theta_k)\delta_n \\ u_n(\theta_k) - \theta_k & = & (\theta_k(x_0) - \theta_k)\delta_n \end{array}$$

La fonction θ_k étant continue en x_0, on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad |x - x_0| \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon} \Longrightarrow |\theta_k(x) - \theta_k(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Soit, de plus, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_\varepsilon$. On a

$$|u_n(\theta_k)(x) - \theta_k(x)| = |\theta_k(x_0) - \theta_k(x)||\delta_n| \leqslant \varepsilon.1 = \varepsilon$$

On en déduit la convergence uniforme de $(u_n(\theta_k))_{n\geqslant 1}$ vers θ_k.

II.8.4. On remarque que $(\delta_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$. Ainsi pour toute fonction $f \in \mathcal{H}$, la suite de fonctions $(u_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x = x_0 \\ (1 + \lambda_0)f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc si $\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \neq 0$ alors $u_n(f)(x_0) \neq f(x_0)$. On choisit alors une fonction f telle que $\lambda_0 f(x_0)+\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2) \neq 0$. On en déduit que $(u_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction discontinue. Ainsi la convergence ne peut être uniforme.

III Théorème de Korovkin sur $\mathcal{F}$

III.1. Soit $f \in \mathcal{F}$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est alors continue sur $[-2\pi, 4\pi]$ qui est compact. Ainsi, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[-2\pi, 4\pi]$. Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall (t,x) \in [-2\pi, 4\pi]^2 \quad |t-x| \leqslant \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|t-x| \leqslant \eta'_\varepsilon = \min(\eta_\varepsilon, 2\pi)$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel $t - 2k\pi \in [0, 2\pi]$, et posons $t' = t - 2k\pi$ et $x' = x - 2k\pi$. On a alors $|t'-x'| \leqslant \eta'_\varepsilon \leqslant \eta_\varepsilon$, $t' \in [0,2\pi] \subset [-2\pi, 4\pi]$ et

$$-\eta'_\varepsilon \leqslant x' - t' \leqslant \eta'_\varepsilon \Longleftrightarrow t' - \eta'_\varepsilon \leqslant x' \leqslant \eta'_\varepsilon + t' \Longleftrightarrow -\eta'_\varepsilon \leqslant x' \leqslant \eta'_\varepsilon + 2\pi$$

Or $\eta'_\varepsilon \leqslant 2\pi$ et $-2\pi \leqslant -\eta'_\varepsilon$, donc

$$-\eta'_\varepsilon \leqslant x' \leqslant \eta'_\varepsilon + 2\pi \Longleftrightarrow -2\pi \leqslant x' \leqslant 4\pi \Longleftrightarrow x' \in [-2\pi, 4\pi]$$

On en déduit par 2π-périodicité de f que

$$|f(t) - f(x)| = |f(t') - f(x')| \leqslant \varepsilon$$

Par conséquent, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

III.2 Remarquons tout d'abord que $x \mapsto \sin^2(x)$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et π-périodique. Montrons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|t - x - 2k\pi| \leqslant \pi$.
Supposons qu'un tel k existe, on a alors

$$|t - x - 2k\pi| \leqslant \pi \Longleftrightarrow (2k-1)\pi \leqslant t - x \leqslant (2k+1)\pi \Longleftrightarrow 2k - 1 \leqslant \frac{t-x}{\pi} \leqslant 2k+1$$

Posons $\ell = \left[\frac{t-x}{\pi}\right]$ ([.] désignant la fonction partie entière). Si ℓ est impair, alors $k = \frac{\ell+1}{2}$ et si ℓ est pair, alors $k = \frac{\ell}{2}$ convient. Réciproquement, un tel choix de k implique que $|t - x - 2k\pi| \leqslant \pi$. Posons $t' = t - 2k\pi$.
Soient $\varepsilon > 0$ et $0 < \eta_\varepsilon < \pi$ venant de l'uniforme continuité de f sur $\mathbb{R}$ (si $\eta_\varepsilon \geqslant \pi$, on le divise par $\pi + 1$). Si $|t' - x| \leqslant \eta_\varepsilon$, alors

$$|f(t) - f(x)| = |f(t') - f(x)| \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}\psi_x(t) \text{ car } \psi_x \geqslant 0$$

Supposons maintenant que $|t' - x| > \eta_\varepsilon$, on a alors

$$\begin{aligned}
\eta_\varepsilon < |t' - x| \leqslant \pi \quad &\Longrightarrow \quad 0 < \frac{\eta_\varepsilon}{2} < \frac{|t'-x|}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \\
&\Longrightarrow \quad \sin^2\left(\frac{\eta_\varepsilon}{2}\right) < \sin^2\left(\frac{|t'-x|}{2}\right) \\
&\Longrightarrow \quad 1 < \frac{\sin^2\left(\frac{|t'-x|}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\eta_\varepsilon}{2}\right)} \\
&\Longrightarrow \quad 1 < \frac{\sin^2\left(\frac{t-x-2k\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\eta_\varepsilon}{2}\right)} \\
&\Longrightarrow \quad 1 < \frac{\psi_x(t)}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$|f(t)-f(x)| = |f(t')-f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty \frac{\psi_x(t)}{\psi_0(\eta_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}\psi_x(t)$$

On en conclut que

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}^2 \quad |f(t)-f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}\psi_x(t)$$

III.3. D'aprés la question précédente

$$|f(t)-f(x)c_0(t)| \leqslant \varepsilon c_0(t) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)$$

Or

$$\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right) = \frac{1-\cos(t-x)}{2} = \frac{1}{2}(c_0(t)-\cos(x)c_1(t)-\sin(x)s_1(t))$$

Ainsi

$$|f-f(x)c_0| \leqslant \varepsilon c_0 + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}(c_0-\cos(x)c_1-\sin(x)s_1)$$

III.4. D'après la question précédente et la question I.1., on a

$$\begin{aligned}
|u(f-f(x)c_0)| &\leqslant u(|f-f(x)c_0|)\\
&\leqslant u\left(\varepsilon c_0 + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}(c_0-\cos(x)c_1-\sin(x)s_1)\right)\\
|u(f-f(x)c_0)| &\leqslant \varepsilon u(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}(u(c_0)-\cos(x)u(c_1)-\sin(x)u(s_1))
\end{aligned}$$

III.5.1. L'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ implique que $c_0 - c_1^2 - s_1^2 = 0$, on a donc

$$g_n = g_n - 0 = u_n(c_0) - c_0 + c_1(u_n(c_1)-c_1) + s_1(u_n(s_1)-s_1)$$

Ainsi pour pour $\varepsilon > 0$ et $n\in\mathbb{N}$ suffisamment grand

$$\|g_n\|_\infty \leqslant \|u_n(c_0)-c_0\|_\infty + 1.\|u_n(c_1)-c_1\|_\infty + 1.\|u_n(s_1)-s_1\|_\infty \leqslant 3\varepsilon$$

Par conséquent, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

III.5.2. D'après la question précédente et la question III.4., on a

$$|h_n(x)| \leqslant \varepsilon u_n(c_0)(x) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}g_n(x) \Longrightarrow \|h_n\|_\infty \leqslant \varepsilon\|u_n(c_0)\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}\|g_n\|_\infty$$

Or pour n suffisamment grand $\|g_n\|_\infty \leqslant \frac{\psi_0(\eta_\varepsilon)}{\|f\|_\infty}\varepsilon$, donc

$$\|h_n\|_\infty \leqslant \varepsilon\|u_n(c_0)\|_\infty + \varepsilon$$

comme la quantité $\|u_n(c_0)\|_\infty$ reste bornée (car $\|u_n(c_0)-c_0\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini), on en déduit la convergence uniforme de $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

III.5.3. On a $u_n(f - f(x)c_0)(x) = u_n(f)(x) - f(x)u_n(c_0)$, ainsi

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leqslant \|h_n\|_\infty + \|f - fu_n(c_0)\|_\infty = \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|c_0 - u_n(c_0)\|_\infty$$

Le membre de droite de l'inégalité tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, on en déduit que la suite $(u_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

III.6. On a pour $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\|T_n(c_0) - c_0\|_\infty &= 0 \\
\|T_n(c_1) - c_1\|_\infty &= \frac{\|c_1\|_\infty}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\
\|T_n(s_1) - s_1\|_\infty &= \frac{\|s_1\|_\infty}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

On en déduit que les suites $(T_n(c_0))_{n\geqslant 1}$, $(T_n(c_1))_{n\geqslant 1}$, $(T_n(s_1))_{n\geqslant 1}$ convergent uniformément respectivement vers c_0, c_1, s_1. D'après la question précédente, on peut en conclure que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, la suite $(T_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.